





Über eine reell irreducible Gruppe von Berührungstransformationen.

Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät zu Greifswald

vorgelegt von

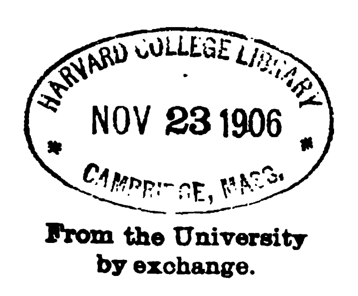
Walther Brügmann,

Oberlehrer in Hamburg.



HAMBURG, 1906.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senats Buchdruckern.



Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät der Königlichen Universität Greifswald.

Dekan: Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Seeck.

Referent: **Prof. Dr. Engel.**

Datum der mündlichen Prüfung: 13. Januar 1906.

Herr Professor Engel hat 1892 in den Leipziger Berichten eine Untersuchung über eine Gruppe von Berührungstransformationen veröffentlicht, die als reelle Gruppe irreducibel ist, also durch eine reelle Berührungstransformation nicht in eine Gruppe von Punkttransformationen übergeführt werden kann, die aber durch eine imaginäre Berührungstransformation in die allgemeine projektive Gruppe übergeführt wird.

Den invarianten Scharen von Mannigfaltigkeiten der projektiven Gruppe entsprechen natürlich invariante Scharen von Mannigfaltigkeiten der andern Gruppe.

Herr Professor Engel hat bereits 1892 die Mannigfaltigkeiten angegeben, die den Punkten und den n-fach ausgedehnten Ebenen des projektiven Raumes von $n+1$ Dimensionen entsprechen. Einer Anregung von ihm folgend, werde ich hier gewisse andere invariante Scharen von Mannigfaltigkeiten untersuchen.

Kapitel I.

Die Ebene.

Als Punktkoordinaten der Ebene benutze ich x und z und als Koordinaten der Linienelemente x, z, y, so daß für unendlich benachbarte Linienelemente, die einem Elementverein angehören, die Gleichung besteht:

$$dz - y\,dx = 0.$$

Als Koordinaten der projektiven Ebene benutze ich die gestrichenen Buchstaben x', z', y'.

Die Gruppe hat die charakteristischen Funktionen:

$$(1)\quad \begin{array}{|c|} 1,\ x,\ y,\ x^2+y^2,\ z-\tfrac{1}{2}xy, \\ x\left(x^2+y^2\right)-4y\left(z-\tfrac{1}{2}xy\right) \\ y\left(x^2+y^2\right)+4x\left(z-\tfrac{1}{2}xy\right) \\ \left(x^2+y^2\right)^2+16\left(z-\tfrac{1}{2}xy\right)^2 \end{array}$$

Bei Anwendung der Transformation:

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x' - y'}{2} \qquad y = \dfrac{x' + y'}{2i} \\ z = \dfrac{z'}{2i} + \dfrac{1}{8i}\left\{x'^2 - 2x'y' - y'^2\right\} \end{cases}$$

entsteht sie aus der Gruppe der projektiven Punkttransformationen der Ebene x', z'.

Den Punkten und geraden Linien der projektiven Ebene entsprechen bei der Gruppe 1 die beiden invarianten konjugiert imaginären Kurvenscharen:

$$z = \pm \frac{i}{2} x^2 + ax + b.$$

Ich habe nun untersucht, welche Mannigfaltigkeiten den Kegelschnitten der projektiven Ebene entsprechen.

---

§ 1.

Die Parabeln der projektiven Ebene und die ihnen entsprechenden Mannigfaltigkeiten.

Einem Linienelement $x' = t\ z' = c\ y' = b$ der projektiven Ebene entspricht das Linienelement $x\ y\ z$, wenn die Gleichungen bestehen:

$$t = x + iy,\ b = -x + iy,\ c = 2iz - \tfrac{1}{2}(x^2 + 2ixy + y^2).$$

Wenn t, b und c reell sind, bestimmen diese Gleichungen diejenigen Linienelemente, die den reellen Elementen der projektiven Ebene entsprechen.

Einem reellen Linienelement der projektiven Ebene entspricht also im allgemeinen ein imaginäres Linienelement.

Soll das entsprechende Element $x\ y\ z$ ebenfalls reell werden, so muß

$$y = 0$$
$$t = x,\ b = -x$$
$$z = 0,\ c = -\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}t^2$$

sein. Die Linienelemente

$$x' = t,\ y' = -t,\ z' = -\tfrac{1}{2}t^2$$

sind also die einzigen reellen Elemente der projektiven Ebene, denen wieder reelle Elemente entsprechen.

Sie liegen auf der Parabel:

$$z' + \tfrac{1}{2}x'^2 = 0$$
$$y' + x' = 0.$$

Dieser Parabel entspricht die gerade Linie:

$$x = t,\ y = 0,\ z = 0,$$

die x-Achse. Die Parabel $z' + \frac{1}{2}x'^2 = 0$ und die Grade $y = 0\ z = 0$ sind also in jeder der beiden Ebenen die einzige reelle Mannigfaltigkeit, deren sämtlichen reellen Elementen wieder reelle Elemente entsprechen.

Ein beliebiger andrer Kegelschnitt der projektiven Ebene hat mit dieser Parabel höchstens 2 Linienelemente gemein. Mit Ausnahme dieser Parabel kann also ein Kegelschnitt höchstens zwei reelle Elemente enthalten, denen wieder reelle Elemente entsprechen.

Zwei Parabeln können mit einander höchstens ein Linienelement gemeinsam haben. Parabeln haben daher höchstens ein reelles Linienelement, dem wieder ein reelles Linienelement entspricht.

Die Parabel $z' + \frac{1}{2} x'^2 = 0$
$$y' + x' = 0$$
bleibt bei der dreigliedrigen projektiven Gruppe:
$$(x'^2 + z')\, p' + x'z'q'$$
$$x'p' + 2\, z'q'$$
$$p' - x'q'$$
invariant.

Die projektive Gruppe enthält noch die von diesen und von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:
$$p' + x'q',\ q',\ x'p',\ z'p',\ x'z'p' + z'^2 q'.$$
$$\left(p' \text{ und } q' \text{ sind Abkürzungen für } \frac{\partial f}{\partial x'} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Wenn man diese 5 eingliedrigen Gruppen nacheinander auf die Parabel ausübt, geht sie also in ∞^{10} komplexe Kurven über.

Die 4 Gruppen: $p' + x'q',\ q',\ x'p',\ z'p'$ sind aber linear. Bei ihnen geht die Parabel also in ∞^8 komplexe Parabeln über, und durch die ihnen entsprechenden eingliedrigen Gruppen geht die Gerade $y = o\ z = o$ in ∞^8 Mannigfaltigkeiten über, die Parabeln entsprechen.

Den drei Gruppen
$$p' + x'q',\ q',\ x'p'$$
mit den charakteristischen Funktionen:
$$y' - x', -1, y'x'$$
entsprechen bis auf konstante Faktoren die drei reellen Gruppen mit den charakteristischen Funktionen
$$x, 1, x^2 + y^2.$$

Dagegen entspricht der eingliedrigen Gruppe $z'p'$ mit der charakteristischen Funktion $y'z'$ keine reelle Gruppe sondern die imaginäre Gruppe:
$$(x - iy)\,(x^2 + y^2) - 4\,(y + ix)\,(z - \tfrac{1}{2} xy).$$

Überhaupt entspricht jeder linearen eingliedrigen Gruppe $a\, y'z' + \dots\dots$, in der a von Null verschieden ist, eine imaginäre eingliedrige Gruppe, denn die Gruppe (1) enthält keine reelle 6gliedrige Untergruppe.

Es lassen sich also nur 5 von einander unabhängige reelle charakteristische Funktionen angeben, die linearen Gruppen entsprechen. Das sind aber:
$$x, 1, y, x^2 + y^2, z - \tfrac{1}{2} xy.$$

Daher ist von vornherein wahrscheinlich, daß die Gerade $y = 0\ z = 0$ durch alle Gruppen, die den Gruppen $ay'z' + by' + cx' + d + ey'x'$ entsprechen, wenn a von Null verschieden ist, in imaginäre Mannigfaltigkeiten übergeführt wird.

Die Gruppe $y'z'$ hat die endlichen Gleichungen:
$$x_1' = x' + \varrho z'$$
$$y_1' = \frac{y'}{1 + \varrho y'}$$
$$z_1' = z'.$$

Daher hat die ihr entsprechende Gruppe die endlichen Gleichungen:

$$x_1 + iy_1 = x + iy + \varrho\,(2iz - \tfrac{1}{2}x^2 - ixy - \tfrac{1}{2}y^2)$$

$$-x_1 + iy_1 = \frac{-x + iy}{1 - \varrho x + i\varrho y.}$$

$$2iz_1 - \tfrac{1}{2}(x_1^2 + 2ix_1 y_1 + y_1^2) = 2iz - \tfrac{1}{2}(x^2 + 2ixy + y^2).$$

Führt man diese Transformation auf die Gerade $x = t$ $y = 0$ $z = 0$ aus, so erhält man die Mannigfaltigkeiten:

$$x_1 = \frac{4t - 3\varrho t^2 + \varrho^2 t^3}{4(1 - \varrho t)} \qquad y_1 = \frac{i(3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)}{4(1 - \varrho t)}$$

$$z_1 = \frac{-8\varrho t^3 + 9\varrho^2 t^4 - 6\varrho^3 t^5 + \varrho^4 t^6}{32i(1 - \varrho t)^2}$$

Die Gruppe $x^2 + y^2$ hat die endlichen Gleichungen:

$$x_2 = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha$$

$$y_2 = -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

$$z_2 = z_1 - \frac{x_1^2 - y_1^2}{4}\sin 2\alpha - xy \sin^2\alpha.$$

Bei Anwendung dieser Gruppe werden die Gleichungen der Mannigfaltigkeiten:

$$x_2 = \frac{4t\cos\alpha + (3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)(-\cos\alpha + i\sin\alpha)}{4(1 - \varrho t)}$$

$$y_2 = \frac{-4t\sin\alpha + (3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)\ i\cos\alpha + \sin\alpha)}{4(1 - \varrho t)}$$

$$z_2 = \frac{-8\varrho t^3 + 9\varrho^2 t^4 - 6\varrho^3 t^5 + \varrho^4 t^6}{32i(1 - \varrho t)^2} - \frac{8t^2 - 12\varrho t^3 + 13\varrho^2 t^4 - 6\varrho^3 t^5 + \varrho^4 t^6}{32(1 - \varrho t)^2}\sin 2\alpha - \frac{12\varrho t^3 - 13\varrho^2 t^4 + 6\varrho^3 t^5 - \varrho^4 t^6}{16(1 - \varrho t)^2}\, i\sin^2\alpha.$$

Wenn man jetzt noch die beiden eingliedrigen Gruppen x und 1 auf diese Schar ausübt, so erhält man ∞^8 Mannigfaltigkeiten. Trotzdem sind das noch nicht alle, die Parabeln entsprechen. Daher muß man noch die Gruppe y anwenden. Man erhält dann allerdings einen unwesentlichen Parameter also trotzdem nur ∞^8 Mannigfaltigkeiten.

Die dreigliedrige Gruppe $-x$, $-1, y$ hat die endlichen Gleichungen:

$$x_3 = x_2 + a$$

$$y_3 = y_2 + b$$

$$z_3 = z_2 + bx_2 + c.$$

Bei Anwendung dieser Transformation erhält die Schar, die den Parabeln entspricht, die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{4t\cos\alpha + (3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)(-\cos\alpha + i\sin\alpha)}{4(1 - \varrho t)} + a \\[2ex] y_3 = \dfrac{-4t\sin\alpha + (3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)(i\cos\alpha + \sin\alpha)}{4(1 - \varrho t)} + b \\[2ex] z_3 = \dfrac{-8\varrho t^3 + 9\varrho^2 t^4 - 6\varrho^3 t^5 + \varrho^4 t^6}{32i(1 - \varrho t)^2} - \dfrac{8t^2 - 12\varrho t^3 + 13\varrho^2 t^4 - 6\varrho^3 t^5 + \varrho^4 t^6}{32(1 - \varrho t)^2}\sin 2\alpha - \\ \quad - \dfrac{12\varrho t^3 - 13\varrho^2 t^4 + 6\varrho^3 t^5 - \varrho^4 t^6}{16(1 - \varrho t)^2}\, i\sin^2\alpha + b\,\dfrac{4t\cos\alpha + (3\varrho t^2 - \varrho^2 t^3)(-\cos\alpha + i\sin\alpha)}{4(1 - \varrho t)} + c. \end{cases}$$

Der Parameter a ist nicht wesentlich.

Die Schar (3) enthält alle Mannigfaltigkeiten, die Parabeln entsprechen.

Diese Mannigfaltigkeiten sind aber sämtlich imaginär, wenn ϱ von Null verschieden ist. Allerdings folgt der strenge Beweis für die letzte Behauptung erst weiter hinten.

Wenn $\varrho = 0$ ist, werden die Gleichungen der Schar sehr viel einfacher:

$$(4)\quad \begin{cases} x = t\cos\alpha + a \\ y = -t\sin\alpha + b \\ z = -\frac{1}{2}t^2\sin\alpha\cos\alpha + bt\cos\alpha + c. \end{cases}$$

Hier ist statt $x_3\ y_3\ z_3$ wieder $x\ y\ z$ geschrieben.

Wenn der unwesentliche Parameter a Null ist, kann die Schar (4) geschrieben werden:

$$z = -\tfrac{1}{2}x^2\operatorname{tg}\alpha + bx + c.$$

Das sind im allgemeinen ebenfalls Parabeln, wenn aber $\sin\alpha = o$ ist, sind es die sämtlichen Geraden der Ebene:

$$z = bx + c.$$

Wenn $\cos\alpha = 0$ ist, ist $x = 0$, $z = c$, $y = -t + b$.

Dies sind alle Punkte der z Achse.

Wenn a von Null verschieden ist, bleiben die Parabeln und Geraden ungeändert, aber wenn $\cos\alpha = 0$ ist, erhält man

$$x = a$$
$$y = -t + b$$
$$z = c,$$ also alle Punkte der Ebene.

Wenn ich statt $\operatorname{tg}\alpha$ einfach α als Parameter einführe, entsprechen den Parabeln und Geraden

$$z = -\tfrac{1}{2}x^2\alpha + bx + c$$

die Parabeln der projektiven Ebene:

$$z'(1 - i\alpha)^2 = 2ic(1 - i\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}x'^2(1 + \alpha^2) + 2\alpha bx' + 2ibx' - b^2 i\alpha + b^2.$$

Den Punkten $x = a$, $y = b$, $z = c$ der Ebene entsprechen in der projektiven Ebene die Parabeln:

$$z' = 2ic + \tfrac{1}{2}x'^2 + a^2 - 2ax'.$$

Beweis, daß die Gleichungen (3) nur dann reelle Mannigfaltigkeiten darstellen können, wenn $\varrho = 0$ ist.

Bei diesem Beweis benutze ich als Punktkoordinaten der Ebene wieder x und z, aber als Koordinaten der Linienelemente x, z, z'. z' ist also eine Abkürzung für $\frac{dz}{dx}$. Ebenso bedeutet z'' $\frac{d^2z}{dx^2}$, z''' $\frac{d^3z}{dx^3}$ usw.

Die Koordinaten der projektiven Ebene bezeichne ich mit deutschen Buchstaben. Die Transformation (2) hat bei dieser Schreibweise die Gleichungen:

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l|l} x = \dfrac{\mathfrak{x} - \mathfrak{z}'}{2} & \mathfrak{x} = x + iz' \\ z' = \dfrac{\mathfrak{x} + \mathfrak{z}'}{2i} & \mathfrak{z}' = -x + iz' \\ z = \dfrac{\mathfrak{z}}{2i} + \dfrac{1}{8i}\left\{\mathfrak{x}^2 - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'^2\right\} & \mathfrak{z} = 2iz - \dfrac{1}{2i}\left\{x^2 + 2ixz' + z'^2\right\} \end{array}\right.$$

und die erweiterten Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{l|l} z'' = \dfrac{1 + \mathfrak{z}''}{i(1 - \mathfrak{z}'')} & \mathfrak{z}'' = \dfrac{-1 + iz''}{1 + iz''} \\ z''' = \dfrac{-4i\mathfrak{z}'''}{(1 - \mathfrak{z}'')^3} & \mathfrak{z}''' = \dfrac{2iz'''}{(1 + iz'')^3} \\ z^{IV} = \dfrac{-8i\mathfrak{z}^{IV}(1 - \mathfrak{z}'') - 24i\mathfrak{z}'''^2}{(1 - \mathfrak{z}'')^5} & \mathfrak{z}^{IV} = \dfrac{2iz^{IV}(1 + iz'') + 6z'''^2}{(1 + iz'')^5} \end{array}\right.$$

Herr Professor Engel hat mich auf einen Satz von Halphen aufmerksam gemacht, der durch Differentiation und Elimination leicht verifiziert werden kann:

Alle Kegelschnitte der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ genügen einer Differentialgleichung:

$$\frac{d^3\left(\mathfrak{z}''^{-\frac{2}{3}}\right)}{d\mathfrak{x}^3} = 0$$

Alle Parabeln genügen der Gleichung:

$$\frac{d^2\left(\mathfrak{z}''^{-\frac{2}{3}}\right)}{d\mathfrak{x}^2} = 0$$

oder:

$$3\mathfrak{z}''\,\mathfrak{z}^{IV} - 5\mathfrak{z}'''^2 = 0.$$

Führt man auf diese Differentialgleichung 4ter Ordnung die erweiterte Transformation (5) aus, so erhält man die Differentialgleichung der Schar (3):

$$z'''^2 + 9iz'''^2 z'' - 3iz^{IV}(1 + z''^2) = 0.$$

Eine Kurve der Schar (3) ist dann und nur dann reell, wenn sie dem reellen und dem imaginären Teil dieser Gleichung genügt, d. h. wenn sie der Gleichung $z''' = 0$ genügt.

Eine Ausnahme können nur die Punkte bilden.

Der Gleichung $z''' = 0$ entspricht in der projektiven Ebene die Gleichung $\mathfrak{z}''' = 0$.

Also sind in der Tat die Parabeln

$$z = -\tfrac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

außer den Punkten die einzigen reellen Mannigfaltigkeiten der Schar (3).

Diesen einfachen Beweis hat mir Herr Professor Engel gegeben. Der Satz wurde von mir aufgestellt und umständlicher bewiesen.

§ 2.

Die Kurven, welche den Ellipsen und Hyperbeln der projektiven Ebene entsprechen.

Um die allgemeinste Gleichung einer Kurve zu erhalten, die einem Kegelschnitt der projektiven Ebene entspricht, müßten die Gleichungen (3) noch durch die Gruppe transformiert werden, die der eingliedrigen Gruppe $x'z'p' - z'^2q'$ entspricht. Ich ziehe es aber vor, von einer speziellen Ellipse auszugehen und auf diese die Gruppe (1) anzuwenden. Ich wähle dazu den imaginären Kreis

$$\begin{cases} x'^2 + z'^2 + 1 = 0 \\ x' + z'y' = 0. \end{cases}$$

Durch Einführung des Parameters t_1 können diese Gleichungen geschrieben werden:

$$x' = \frac{2it_1}{1+t_1^2}$$

$$y' = \frac{-2t_1}{1-t_1^2}$$

$$z' = i\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}.$$

Durch die Transformation (2) gehen diese letzten Gleichungen über in:

$$x = \frac{it_1}{1+t_1^2} + \frac{t_1}{1-t_1^2}$$

$$y = \frac{t_1}{1+t_1^2} + \frac{it_1}{1-t_1^2}$$

$$z = \frac{1+t_1^4}{2(1-t_1^4)} + \frac{it_1^2(1+t_1^4)}{(1-t_1^4)^2}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, t(1-i)$, so erhalten sie die Form:

$$(6) \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}\,(t - t^3)}{1+t^4} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}\,(t+t^3)}{1+t^4} \\ z = \dfrac{1 + 2t^2 - 2t^6 - t^8}{2(1+t^4)^2}. \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen stellen also die Kurve dar, die dem imaginären Kreise $x'^2 + z'^2 + 1 = 0$ entspricht.

Dieser Kreis bleibt invariant bei der dreigliedrigen projektiven Gruppe:

$$y'z' + x',\; y' + y'x'^2 - x'z',\; x'y'z' - z'^2 - 1.$$

Die projektive Gruppe enthält noch die von diesen und von einander unabhängigen 5 charakteristischen Funktionen:

$$y',\; -1,\; x'y',\; -z',\; -x',$$

die eine 5 gliedrige lineare Gruppe bestimmen und den imaginären Kreis deshalb in sämtliche ∞^{10} Ellipsen und Hyperbeln der projektiven Ebene überführen aber nicht in eine Parabel.

Dieser 5 gliedrigen linearen Gruppe entspricht eine 5 gliedrige Untergruppe der Gruppe (1):

$$1,\ x,\ x^2 + y^2,\ z - \tfrac{1}{2}xy,\ y.$$

Diese Gruppe führt also die Kurve (6) in eine Kurvenschar mit 5 wesentlichen Parametern über, nämlich in die ∞^{10} Kurven, die den Ellipsen und Hyperbeln der projektiven Ebene entsprechen.

Die zweigliedrige Gruppe

$$x^2 + y^2,\ z - \tfrac{1}{2}xy$$

hat die endlichen Transformationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax + By \\ y_1 &= -Bx + Ay \\ z_1 &= (A^2 + B^2)\,z - \frac{x^2 - y^2}{2}\,AB - xyB^2. \end{aligned}$$

Damit eine wirkliche Transformation der ganzen Ebene vorhanden ist, darf $A^2 + B^2$ nicht Null werden.

Durch diese Transformationen erhalten die Gleichungen (6) die Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t\,(A\sqrt{2} + B\sqrt{2}) - t^3\,(A\sqrt{2} - B\sqrt{2})}{1 + t^4} \\ y_1 &= \frac{t\,(A\sqrt{2} - B\sqrt{2}) + t^3\,(A\sqrt{2} + B\sqrt{2})}{1 + t^4} \\ z_1 &= A^2\,\frac{1 + 2t^2 - 2t^6 - t^8}{2\,(1 + t^4)^2} + AB\,\frac{4t^4}{(1 + t^4)^2} + B^2\,\frac{1 - 2t^2 + 2t^6 - t^8}{2\,(1 + t^4)^2}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} A\sqrt{2} + B\sqrt{2} &= u \\ A\sqrt{2} - B\sqrt{2} &= v \end{aligned}$$

und schreibt statt $x_1\, y_1\, z_1$ wieder $x\, y\, z$, so erhält man die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{ut - vt^3}{1 + t^4} \\[2mm] y = \dfrac{vt + ut^3}{1 + t^4} \\[2mm] z = \dfrac{u^2\,(1 + 4t^4 - t^8) + 4uv\,(t^2 - t^6) + v^2\,(1 - 4t^4 - t^8)}{8\,(1 + t^4)^2}. \end{cases}$$

Die dreigliedrige Gruppe $1, x, -y$ hat die endlichen Gleichungen:

$$x_1 = x - a,\ y_1 = y - b,\ z_1 = z - bx - c.$$

Bei Anwendung dieser Gruppe erhalten die Gleichungen (7) die Form:

$$(8)\quad \begin{cases} x = \dfrac{ut - vt^3}{1 + t^4} - a \\[2mm] y = \dfrac{vt + ut^3}{1 + t^4} - b \\[2mm] z = \dfrac{u^2\,(1 + 4t^4 - t^8) + 4uv\,(t^2 - t^6) + v^2\,(1 - 4t^4 - t^8)}{8\,(1 + t^4)^2} - b\,\dfrac{ut - vt^3}{1 + t^4} - c. \end{cases}$$

Dabei ist statt $x_1\, y_1\, z_1$ wieder $x\, y\, z$ geschrieben.

$u^2 + v^2$ ist immer von Null verschieden. Daher läßt sich der Grad der Gleichungen (8) nicht durch besondere Wahl der Konstanten erniedrigen.

Resultat: Den Ellipsen und Hyperbeln der projektiven Ebene entsprechen ∞^{10} rationale Kurven achten Grades mit den Gleichungen (8).

Den Parabeln der projektiven Ebene entsprechen im allgemeinen imaginäre Kurven sechsten Grades mit den Gleichungen (3). Es gibt aber ∞^6 Parabeln, denen Mannigfaltigkeiten niedrigeren Grades entsprechen mit den Gleichungen (4).

Die beiden Scharen (8) und (3) bilden zusammen eine bei der Gruppe (1) invariante Schar von Mannigfaltigkeiten.

Diskussion der Gleichungen.

Ich untersuche zunächst die Gleichungen (7).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u - 3vt^2 - 3ut^4 + vt^6}{(1+t^4)^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u^2(t^3 - 3t^7) + v^2(-3t^3 + t^7) + uv(t - 6t^5 + t^9)}{(1+t^4)^3}$$

$$= \frac{(u - 3vt^2 - 3ut^4 + vt^6)(vt + ut^3)}{(1+t^4)^3}.$$

In der Tat ist also $\frac{dz}{dx} = \frac{vt + ut^3}{1+t^4} = y$, so daß die Gleichungen wirklich eine Elementmannigfaltigkeit darstellen.

Maxima oder Minima:

$$y = \frac{vt + ut^3}{1+t^4} = 0$$

1. $t = \pm\infty \quad x = 0,\ y = 0,\ z = -\frac{u^2+v^2}{8}$

2. $t = 0 \quad x = 0 \quad y = 0 \quad z = \frac{u^2+v^2}{8}.$

Alle Kurven, für die $u^2 + v^2$ denselben Wert hat, haben diese beiden Linienelemente gemeinsam.

3. $v + ut^2 = 0$

$$t^2 = -\frac{v}{u}.$$

Wenn v und u gleiche Vorzeichen haben, hat die Kurve nur zwei Maxima oder Minima, ebenso wenn $u = 0$ oder $v = 0$ ist.

Wenn v und u verschiedene Vorzeichen haben, hat die Kurve noch 2 andre Maxima oder Minima

$$t = \pm\sqrt{-\frac{v}{u}} \quad x = \pm\sqrt{-uv} \quad y = 0 \quad z = \frac{u^2-v^2}{8}.$$

Rückkehrpunkte:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

1. $t = \infty$. Dieser Punkt ist in Wirklichkeit kein Doppelpunkt, sondern ein Maximum oder ein Minimum.

2. $vt^6 - 3ut^4 - 3vt^2 + u = 0$

$$t^2 = \alpha$$

$$v\alpha^3 - 3u\alpha^2 - 3v\alpha + u = 0.$$

a) $v = 0$

$$-3u\alpha^2 + u = 0$$

$$-3\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad t_2 = -\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad t_3 \text{ und } t_4 \text{ sind imaginär.}$$

Die Kurven $v = 0$ haben 2 reelle Rückkehrpunkte, weil jedem Wert von t nur ein bestimmter Wert von y entspricht.

b) $u = 0$

$$vt^6 - 3vt^2 = 0$$

$t^2 = 0$ gibt das schon untersuchte Maximum oder Minimum.

$$t^4 - 3 = 0 \quad t = +\sqrt[4]{3}$$

Die Kurven $u = 0$ haben auch zwei reelle Rückkehrpunkte.

c) u und v von Null verschieden.

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 \frac{u}{v} - 3\alpha + \frac{u}{v} = 0.$$

Diese Gleichung hat die drei reellen Wurzeln:

$$\alpha_1 = 2\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cos \tfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} + \frac{u}{v}.$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cos \tfrac{1}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{v}{u} + 2\pi\right) + \frac{u}{v}. \qquad 0 < \operatorname{arctg} \frac{v}{u} < \pi.$$

$$\alpha_3 = 2\sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cos \tfrac{1}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{v}{u} + 4\pi\right) + \frac{u}{v}.$$

Wenn v und u gleiche Vorzeichen haben, wird α_1 positiv, α_2 negativ, α_3 positiv; dann hat die Kurve also 4 reelle Rückkehrpunkte.

Wenn v und u ungleiche Vorzeichen haben, wird α_1 positiv, α_2 und α_3 werden negativ; dann hat die Kurve also nur 2 reelle Rückkehrpunkte.

Doppelpunkte.

Die Kurven haben noch einen Doppelpunkt, der durch die Gleichungen $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$ nicht erhalten wird, weil hier zwei verschiedene Zweige der Kurve zusammentreffen, für die t verschiedene Werte hat.

Setzt man nämlich $x = 0$, so erhält man außer $t = \infty$ und $t = 0$ für t die beiden Werte:

$$t = \pm \sqrt{\frac{u}{v}}$$

Dann wird $x = 0$ $y = \pm \sqrt{uv}$ $z = \frac{v^2 - u^2}{8}$.

Also wenn u oder v Null sind, ist hier kein Doppelpunkt vorhanden.

Haben u und v gleiche Vorzeichen, so ist der Doppelpunkt ein eigentlicher reeller Doppelpunkt.

Haben u und v ungleiche Vorzeichen, so hat die Kurve einen isolierten Punkt.

Mehr als einen Doppelpunkt kann eine Kurve der Schar (7) nicht haben, was sofort gezeigt werden soll.

Der Schar (7) entsprechen die Kegelschnitte

$$\alpha^2 x'^2 + \beta^2 z'^2 + 1 = 0,$$

wo α und β von Null verschieden sein müssen.

Diese Gleichung erhält man nämlich, wenn man auf den imaginären Kreis die zweigliedrige Gruppe $x'y'$, $-z'$ ausübt, die der Gruppe $x^2 + y^2$, $z - \frac{1}{2}xy$ entspricht.

Dabei ist $\alpha^2 = \frac{1}{(A - iB)^2}$ $\beta^2 = \frac{1}{(A^2 + B^2)^2}$.

Eine Kurve der Schar (7) hat dann und nur dann einen reellen oder isolierten Doppelpunkt, wenn der entsprechende Kegelschnitt mit einer Parabel, die in einen Punkt übergeht, zwei Linienelemente gemeinsam hat.

Die Parabeln, die in Punkte übergehen, haben bei vereinfachter Benennung der Konstanten die Gleichung:

$$z' = \frac{1}{2}x'^2 - 2ax' + b.$$

Es ist also zu untersuchen, mit wie vielen dieser Parabeln der Kegelschnitt $\alpha^2 x'^2 + \beta^2 z'^2 + 1 = 0$ zwei Linienelemente gemeinsam hat.

Die Elimination von z' aus diesen beiden Gleichungen liefert:

$$\alpha^2 x'^2 + \beta^2 (\tfrac{1}{2}x'^2 - 2ax' + b)^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung muß 2 Paar gleiche Wurzeln haben, sie muß also die Form haben:

$$\varrho\,(x' - \lambda)^2\,(x' - \mu)^2 = 0$$

oder $\varrho\,\{x'^4 - 2x'^3(\lambda + \mu) + x'^2\,[2\lambda\mu + (\lambda + \mu)^2] - 2x'(\lambda + \mu)\,\lambda\mu + \lambda^2\mu^2\} = 0.$

Durch Vergleichung der Koeffizienten ergibt sich:

$$\varrho = \tfrac{1}{4}\beta^2.$$

$$-2a\beta^2 = -\tfrac{1}{2}\beta^2(\lambda + \mu).$$

Da β nicht Null ist, folgt

$$4a = \lambda + \mu.$$

$$\alpha^2 + 4a^2\beta^2 + b\beta^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2(2\lambda\mu + 16a^2)$$

$$2\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 2b = \lambda \,.\, \mu.$$

$$-4ab\beta^2 = -\tfrac{1}{2}\beta^2 \,.\, 4a\left(2b + \frac{2\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

$$1.\quad a = 0 \quad \text{oder}$$

$$2.\quad b = b + \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

Da α^2 nicht Null sein kann, muß $a = 0$ sein.

$$\beta^2 b^2 + 1 = \tfrac{1}{4}\beta^2 \,.\, 4\left(b + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)^2$$

$$2b = \frac{1}{{}^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Die Gleichungen $a = 0$ und $2b = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ bestimmen für jeden Kegelschnitt $\alpha^2 x'^2 + \beta^2 z'^2 + 1 = 0$ gerade eine Parabel, die zweimal berührt wird. Also hat die entsprechende Kurve gerade einen reellen oder isolierten Doppelpunkt.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Gleichung für die Schnittpunkte 4 gleiche Wurzeln hat, also wenn λ und μ gleich sind, und zwar beide gleich Null. Denn dann hat der Kegelschnitt mit der Parabel nur ein Linienelement gemein.

Dann muß $\lambda\mu = 2b + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ Null werden.

Setzt man in die letzte Gleichung für α^2 und β^2 wieder die Werte $\frac{1}{(A - iB)^2}$ und $\frac{1}{(A^2 + B^2)^2}$ ein, so wird sie

$$0 = (A - iB)^2 + (A + iB)^2$$

$$0 = A^2 - B^2.$$

Entweder muß $A - B$ oder $A + B$ verschwinden.

In der Tat zeigt sich also, daß die Kurven $u = 0$ und $v = 0$ keinen Doppelpunkt haben, während alle andern Kurven der Schar (7) gerade einen Doppelpunkt haben.

Wendepunkte.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v + 3ut^2 - 3vt^4 - ut^6}{(1 + t^4)^2} = 0.$$

Da der Fall $t = \infty$ keinen Wendepunkt liefert, bleibt nur übrig:

$$ut^6 + 3vt^4 - 3ut^2 - v = 0.$$

a) $v = 0$

$$ut^6 - 3ut^2 = 0$$

$$t^2 = 0 \text{ (Maximum oder Minimum)}$$

$$ut^4 - 3u = 0$$

$$t = + \sqrt[4]{3}.$$

Die Kurven $v = 0$ haben zwei reelle Wendepunkte.

b) $u = 0$

$$3t^4 - 1 = 0 \qquad t = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Die Kurven $u = 0$ haben auch zwei reelle Wendepunkte.

c) u und v von Null verschieden.

$$t^6 + 3\frac{v}{u}t^4 - 3t^2 - \frac{v}{u} = 0 \qquad t^2 = \alpha$$

$$\alpha^3 + 3\frac{v}{u}\alpha^2 - 3\alpha - \frac{v}{u} = 0.$$

Diese Gleichung hat die drei reellen Wurzeln:

$$\alpha_1 = 2\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cos \tfrac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(-\frac{u}{v}\right) - \frac{v}{u}.$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cos \tfrac{1}{3} \left\{\operatorname{arctg}\left(-\frac{u}{v}\right) + 2\pi\right\} - \frac{v}{u}.$$

$$\alpha_3 = 2\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cos \tfrac{1}{3} \left\{\operatorname{arctg}\left(-\frac{u}{v}\right) + 4\pi\right\} - \frac{v}{u}.$$

$$0 < \operatorname{arctg}\left(-\frac{u}{v}\right) < \pi.$$

Haben u und v gleiche Vorzeichen, so wird α_1 positiv und α_2 und α_3 werden negativ; dann hat die Kurve also 2 reelle Wendepunkte.

Haben u und v verschiedene Vorzeichen, so wird α_1 positiv, α_2 negativ, α_3 positiv; dann hat die Kurve 4 reelle Wendepunkte.

In der Schar (7) kommen also 2 verschiedene Typen von Kurven vor.

1. $\frac{u}{v} > 0$, u und v von Null verschieden.

Die Kurven haben einen eigentlichen reellen Doppelpunkt, 4 reelle Rückkehrpunkte, 2 reelle Wendepunkte und 2 reelle Maxima oder Minima.

Wenn $\frac{u}{v} = 1$ ist, fallen die Wendepunkte in den Doppelpunkt hinein.

2. $\frac{u}{v} < 0$, u und v von Null verschieden.

Die Kurven haben einen isolierten Punkt, 2 reelle Rückkehrpunkte, 4 reelle Wendepunkte und 4 reelle Maxima oder Minima.

Wenn $\frac{u}{v} = -1$ ist, fallen zwei Maxima oder Minima in die Rückkehrpunkte hinein.

3. Gewissermaßen als Übergangsformen zwischen diesen beiden Typen sind die Kurven $u = 0$ und $v = 0$ anzusehen. Sie haben 2 reelle Rückkehrpunkte, 2 reelle Wendepunkte und zwei reelle Maxima oder Minima.

Die Schar (8) entsteht aus der Schar (7) durch lineare Transformationen. Sie hat also dieselben Typen von Kurven. Die Singularitäten bleiben ungeändert. Nur Maxima oder Minima können verschwinden oder neu auftreten.

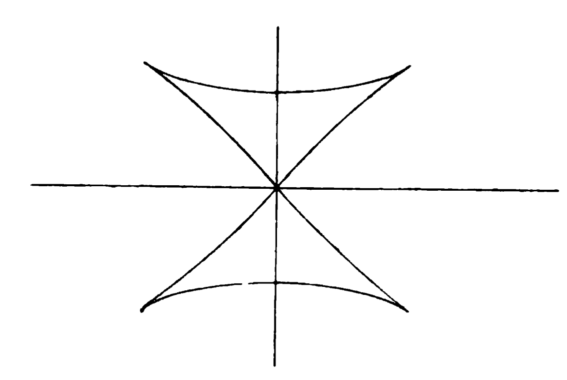
Beispiele:

1. Die Kurve $u = 1$, $v = 1$. (Figur 1.)

Sie erhält durch Elimination von t die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0$$

$$z = \frac{xy^3}{y^2 - x^2}.$$



Figur 1.

Der Doppelpunkt hat die Koordinaten $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = 0$.

Die Rückkehrpunkte sind:

$$x_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \qquad y_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6} \qquad z_1 = +\tfrac{3}{16}\sqrt{3}$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \qquad y_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6} \qquad z_2 = +\tfrac{3}{16}\sqrt{3}$$

$$x_3 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \qquad y_3 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6} \qquad z_3 = -\tfrac{3}{16}\sqrt{3}$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \qquad y_4 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6} \qquad z_4 = -\tfrac{3}{16}\sqrt{3}$$

Die beiden Wendepunkte haben die Koordinaten:

$$x_1 = 0 \qquad z_1 = 0 \qquad y_1 = +1$$

$$x_2 = 0 \qquad z_2 = 0 \qquad y_2 = -1.$$

Sie fallen also in den Doppelpunkt hinein.

Ein Minimum hat die Kurve an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, $z = +\tfrac{1}{4}$ und ein Maximum an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, $z = -\tfrac{1}{4}$.

Sie verläuft zur x-Achse und zur z-Achse symmetrisch.

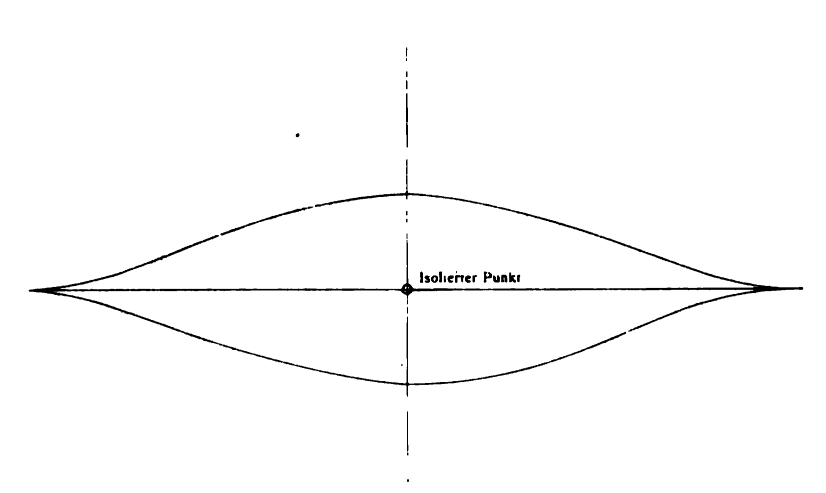
2. $u = 1$, $v = -1$. (Figur 2.)

Die Kurve hat die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$$

$$z = \frac{xy^3}{y^2 - x^2}.$$

Der isolierte Punkt hat die Koordinaten $x = 0$, $y = +i$, $z = 0$.



Figur 2.

Die beiden Rückkehrpunkte sind $x = +1,\ z = 0,\ y = 0$;
und die vier Wendepunkte:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6} & y_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2} & z_1 = -\tfrac{1}{16}\sqrt{3} \\
x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6} & y_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2} & z_2 = -\tfrac{1}{16}\sqrt{3} \\
x_3 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6} & y_3 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2} & z_3 = +\tfrac{1}{16}\sqrt{3} \\
x_4 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6} & y^4 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2} & z_4 = +\tfrac{1}{16}\sqrt{3}
\end{array}
$$

Die Kurve hat ein Maximum $x = 0,\ y = 0,\ z = +\tfrac{1}{4}$ und ein Minimum $x = 0,\ y = 0,\ z = -\tfrac{1}{4}$. Die beiden andern Maxima oder Minima fallen in die Rückkehrpunkte hinein.

Die Kurve verläuft ebenfalls symmetrisch zu den Achsen.

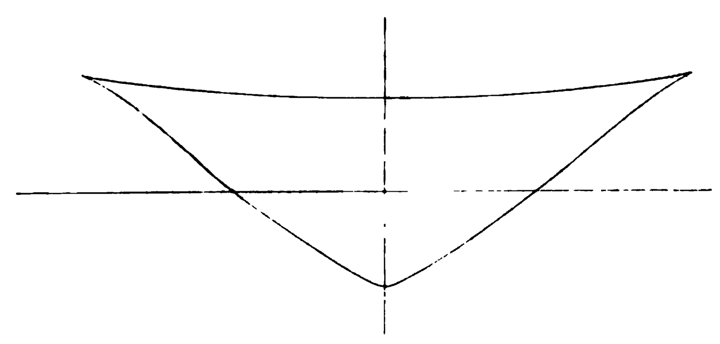
---

3. $u = 0,\ v = \sqrt{2}$ (**Figur 3**).

Die Kurve hat die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$$

$$z = \frac{4x^2y^2 + x^4 - y^4}{8xy}.$$



Figur 3.

Sie hat zwei Rückkehrpunkte mit den Koordinaten:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3}, \qquad y_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad z_1 = \tfrac{5}{16}.$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3}, \qquad y_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad z_2 = \tfrac{5}{16}.$$

und zwei Wendepunkte:

$$x_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad y_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad z_1 = \tfrac{1}{16}$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad y_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad z_2 = \tfrac{1}{16}.$$

Die beiden andern ausgezeichneten Punkte sind Minima. Eigentlich fallen in den einen noch 2 Wendepunkte hinein und in den andern ein Doppelpunkt und 2 Rückkehrpunkte. Ihre Koordinaten sind:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\tfrac{1}{4}.$$

Die Kurve ist nur zur z-Achse symmetrisch.

---

4. $u = \sqrt{2}, \quad v = 0$ (Figur 3 umgekehrt).

Die Kurve hat die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2xy = 0$$
$$z = \frac{4x^2y^2 + x^4 - y^4}{8xy}.$$

Sie hat genau dieselbe Gestalt wie die vorige, nur ist sie an der x-Achse gespiegelt oder um $180°$ herumgedreht.

Ihre Rückkehrpunkte sind:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad y_1 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad z_1 = -\tfrac{5}{16}$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad y_2 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad z_2 = -\tfrac{5}{16}$$

und die Wendepunkte:

$$x_1 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad y_1 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad z_1 = -\tfrac{1}{16}$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{3} \qquad y_2 = +\tfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{3} \qquad z_2 = -\tfrac{1}{16}.$$

Die beiden andern ausgezeichneten Punkte sind hier Maxima. Sie haben wieder die Koordinaten:

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = \pm\tfrac{1}{4}.$$

Die Kurve ist ebenfalls nur zur z-Achse symmetrisch.

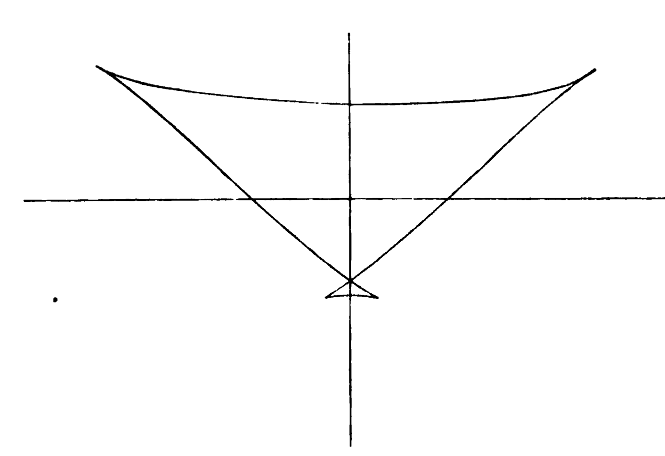
---

5. $u = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \quad v = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ (Figur 4).

Diese Kurve zeigt die Gestalt der allgemeinsten Kurve der Schar (7), wenn u und v gleiche Vorzeichen haben.

Der eigentliche Doppelpunkt hat die Koordinaten:

$$x = 0 \qquad y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \pm 0{,}7071 \qquad z = -\tfrac{1}{8}\sqrt{3} = -0{,}2165.$$



Figur 4.

Die Rückkehrpunkte sind:

$x_1 = +0{,}6719$ $y_1 = +0{,}5638$ $z_1 = +0{,}3490$
$x_2 = -0{,}6719$ $y_2 = -0{,}5638$ $z_2 = +0{,}3490$
$x_3 = +0{,}07236$ $y_3 = -0{,}4104$ $z_3 = -0{,}2610$
$x_4 = -0{,}07236$ $y_4 = +0{,}4104$ $z_4 = -0{,}2610.$

Die beiden Wendepunkte sind:

$x_1 = +0{,}3316$ $y_1 = +0{,}9110$ $z_1 = +0{,}06546$
$x_2 = -0{,}3316$ $y_2 = -0{,}9110$ $z_2 = +0{,}06546.$

Die Kurve hat ein Minimum im Punkte

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = +\tfrac{1}{4}$$

und ein Maximum im Punkte

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = -\tfrac{1}{4}.$$

Sie ist zur z-Achse symmetrisch.

---

6) $u = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ $v = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ (Figur 5).

Diese Kurve zeigt die allgemeinste Gestalt der Kurven der Schar (7), wenn u und v ungleiche Vorzeichen haben.

Der isolierte Punkt hat die Koordinaten:

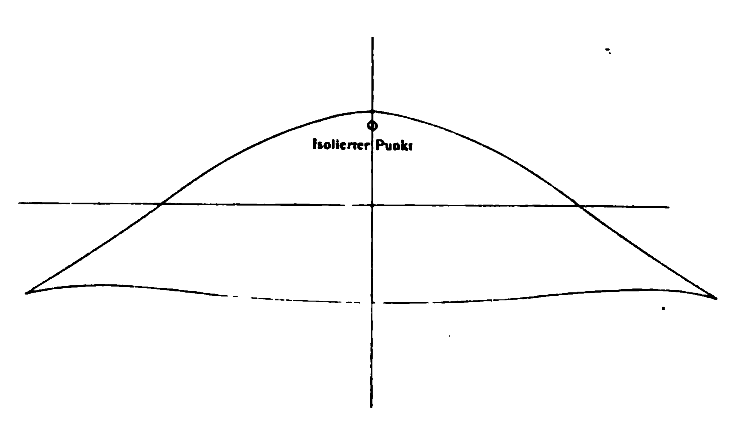
$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}} \quad z = \tfrac{1}{8}\sqrt{3} = +0{,}2165.$$

Die beiden Rückkehrpunkte sind:

$x_1 = +0{,}9110$ $y_1 = -0{,}3316$ $z_1 = -0{,}2366$
$x_2 = -0{,}9110$ $y_2 = +0{,}3316$ $z_2 = -0{,}2366.$

Die vier Wendepunkte haben die Koordinaten:

$x_1 = +0{,}5622$ $y_1 = -0{,}6662$ $z_1 = -0{,}02772$
$x_2 = -0{,}5622$ $y_2 = +0{,}6662$ $z_2 = -0{,}02772$
$x_3 = +0{,}4105$ $y_3 = +0{,}07236$ $z_3 = -0{,}2313$
$x_4 = -0{,}4105$ $y_4 = -0{,}07236$ $z_4 = -0{,}2313.$



Figur 5.

Die Kurve hat ein Minimum: $x = 0,\ y = 0,\ z = -\frac{1}{4}$ und drei **Maxima:**

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = +\tfrac{1}{4}.$$

$$x_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}| = +0{,}7071 \qquad y_2 = 0 \qquad z_2 = -0{,}2165$$

$$x_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}| = -0{,}7071 \qquad y_3 = 0 \qquad z_3 = -0{,}2165.$$

Sie ist symmetrisch zur z-Achse.

Alle sechs hier angeführten Kurven haben die beiden Linienelemente $x=0$ $y=0$ $z=\pm\frac{1}{4}$ gemeinsam, weil für alle sechs $u^2 + v^2$ den Wert $+ 2$ hat. Bei einigen der Kurven sind dies Maxima, bei andern Minima oder auch das eine ein Maximum, das andere ein Minimum.

Weil bei den Kurven der Schar (8) keine andern Singularitäten auftreten, habe ich von ihnen keine Zeichnungen angefertigt.

---

§ 3.

Reelle Kegelschnitte, denen reelle Mannigfaltigkeiten entsprechen.

Ich benutze jetzt wieder x, z als Punktkoordinaten und setze $\frac{dz}{dx} = z'$ $\frac{d_2 z}{dx^2} = z''$ usw.

Die Koordinaten der projektiven Ebene bezeichne ich mit deutschen Buchstaben.

Nach dem oben angeführten Satz von Halphen haben alle Kegelschnitte die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3 \left(\mathfrak{z}''\right)^{-\frac{2}{3}}}{d\mathfrak{x}^3} = 0.$$

Durch dreimalige Integration erhält man daraus:

$$\mathfrak{z}''^{-\frac{2}{3}} = a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2.$$

Für reelle Kegelschnitte müssen die drei Parameter a, b, c reell sein.

Die erweiterte Berührungstransformation (5) S. 6 führt diese Gleichung über in folgende:

$$\left(\frac{-1+iz''}{1+iz''}\right)^{-2} = \left(a + b\,(x+iz') + c\,(x^2 - z'^2 + 2ixz')\right)^3.$$

Damit einem reellen Kegelschnitt eine reelle Kurve entspricht, muß in dieser Differentialgleichung der reelle und der imaginäre Teil verschwinden.

Zur Abkürzung bezeichne ich

$$a + bx + c\,(x^2 - z'^2) \text{ mit } A$$

$$\text{und} \quad bz' + 2cxz' \quad \text{mit } B.$$

Dann zerfällt diese Gleichung in die beiden:

$$\frac{(1-z''^2)^2 - 4z''^2}{(1+z''^2)^2} = A^3 - 3AB^2$$

$$\frac{4z''\,(1-z''^2)}{(1+z''^2)^2} = 3A^2B - B^3.$$

Transformiert man diese beiden Gleichungen in die projektive Ebene zurück, so erhält man zwei Gleichungen für reelle Kegelschnitte, denen reelle Kurven entsprechen:

$$\frac{1+z''^4}{2z''^2} = \mathfrak{A}^3 + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2.$$

$$\frac{1-z''^4}{2z''^2} = 3\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3.$$

$$\mathfrak{A} = a + b\,\frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{z}'}{2} + c\,\frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{z}'^2}{2}.$$

$$\mathfrak{B} = b\,\frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{z}'}{2} + c\,\frac{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}'^2}{2}.$$

Wenn man diese Gleichungen addiert und subtrahiert und die dritten Wurzeln zieht, erhält man:

$$\mathfrak{z}''^{-\frac{2}{3}} = a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2$$

$$\mathfrak{z}''^{+\frac{2}{3}} = a - b\mathfrak{z}' + c\mathfrak{z}'^2.$$

Multipliziert man die letzten Gleichungen, so erhält man

$$1 = (a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2)\,(a - b\mathfrak{z}' + c\mathfrak{z}'^2)$$

und Differentiation nach $\mathfrak{x}$ liefert:

$$0 = (a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2)\,(-b\mathfrak{z}'' + 2c\mathfrak{z}'\mathfrak{z}'') + (a - b\mathfrak{z}' + c\mathfrak{z}'^2)\,(b + 2c\mathfrak{x})$$

oder:

$$0 = \mathfrak{z}''^{+\frac{1}{3}}\,(-b + 2c\mathfrak{z}') + \mathfrak{z}''^{\frac{2}{3}}\,(b + 2c\mathfrak{x}).$$

b und c dürfen hier nicht beide Null werden.

$$-\mathfrak{z}''^{-\frac{1}{3}} = \frac{b + 2c\mathfrak{x}}{-b + 2c\mathfrak{z}'} = \mp\sqrt{a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2}\,|$$

$$\frac{b + 2c\mathfrak{x}}{\mp\sqrt{a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2}} = -b + 2c\mathfrak{z}'.$$

Daraus erhält man durch Integration:

$$\mp\sqrt{a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2}\,| = -b\mathfrak{x} + 2c\mathfrak{z} - 2\alpha.$$

α muß eine reelle Konstante sein.

$$\left(\mathfrak{z} - \frac{b}{2c}\mathfrak{x} - \frac{a}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}(a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2).$$

Die Gleichung $1 = (a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2)(a - b\mathfrak{z}' + c\mathfrak{z}'^2)$ wird, wenn man für $\mathfrak{z}'$ den Wert einsetzt:

$$1 = (a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2)\left(a - \frac{b^2}{4c}\right) + \frac{1}{4c}(b^2 + 4bc\mathfrak{x} + 4c^2\mathfrak{x}^2).$$

Diese Identität zerfällt in die drei Bedingungen:

$$1 = a\left(a - \frac{b^2}{4c}\right) + \frac{b^2}{4c}$$

$$0 = b\left(a - \frac{b^2}{4c} + 1\right)$$

$$0 = c\left(a - \frac{b^2}{4c} + 1\right).$$

Entweder ist $c = 0$ $b = 0$ $a^2 = 1$, dann sind die Kegelschnitte Parabeln (diese sollen später untersucht werden) oder $c \neq 0$

$$a = \frac{b^2}{4c} - 1.$$

Die Kegelschnitte sind entweder Ellipsen oder Hyperbeln und haben die Gleichungen:

$$(9)\begin{cases} \left(\mathfrak{z} - \frac{b}{2c}\mathfrak{x} - \frac{a}{c}\right)^2 - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = 0 \\ \left(\mathfrak{z} - \frac{b}{2c}\mathfrak{x} - \frac{a}{c}\right)\left(\mathfrak{z}' - \frac{b}{2c}\right) - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{x} + \frac{b}{2c}\right) = 0. \end{cases}$$

Alle reellen Ellipsen oder Hyperbeln, denen reelle Kurven entsprechen, sind sicher in der Schar (9) enthalten. Aber nicht allen Kurven der Schar (9) entsprechen reelle Kurven. Dazu ist noch eine Bedingung zu erfüllen.

Durch Elimination von $\mathfrak{z}$ erhält man nämlich aus den Gleichungen der Schar (9):

$$\frac{1}{c}\left(\mathfrak{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}\left(\mathfrak{x} + \frac{b}{2c}\right)^2\left(\mathfrak{z}' - \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{z}' - \frac{b}{2c}\right)^2 = 0.$$

Transformiert man diese Gleichung, so erhält man:

$$(10) \quad \frac{2}{c}(\varrho^2 - z'^2) - (\varrho^2 + z'^2)^2 = 0.$$

Dabei setze ich $\varrho = x + \frac{b}{2c}$ und $\frac{b^2}{8c^2} - \frac{a}{c} = \lambda$.

Transformiert man die erste Gleichung der Schar (9), so erhält man eine imaginäre Gleichung, die in die beiden reellen zerfällt:

$$-(2z - z'\varrho)z' - (\lambda - \tfrac{1}{2}\varrho^2 - \tfrac{1}{2}z'^2)\varrho - \frac{1}{c}\varrho = 0$$

$$-(2z - z'\varrho)\varrho + (\lambda - \tfrac{1}{2}\varrho^2 - \tfrac{1}{2}z'^2)z' - \frac{1}{c}z' = 0.$$

Multipliziert man die erste mit $-\varrho$, die zweite mit z' und addiert, so erhält man:

$$(\varrho^2 + z'^2)\lambda - \tfrac{1}{2}(\varrho^2 + z'^2)^2 + \frac{1}{c}(\varrho^2 - z'^2) = 0$$

oder mit Berücksichtigung von (10)

$$\lambda(\varrho^2 + z'^2) = 0$$

$$\lambda \equiv \frac{b^2}{8c^2} - \frac{a}{c} = 0.$$

Setzt man nun für $\frac{a}{c}$ den Wert $\frac{b^2}{8c^2}$ in die Gleichungen (9) ein, so erhält man mit Ausnahme der Parabeln alle reellen Kegelschnitte, denen reelle Kurven entsprechen. Sie werden nur dann reell, wenn c positiv ist. Ich setze daher $\frac{1}{c} = B^2$ und $\frac{b}{2c} = a$.

Die Kegelschnitte haben dann die Gleichung:

$$(11)\qquad (\mathfrak{z} - a\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}a^2)^2 - B^2(\mathfrak{x} + a)^2 + B^4 = 0.$$

Es sind Hyperbeln.

Sie entstehen aus dem imaginären Kreis $\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{x}^2 + 1 = 0$ durch die Transformation:

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{z}_1 - a\mathfrak{x}_1 - \frac{1}{2}a^2}{B^2}$$

$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{x}_1 + a}{-iB}$$

$$\mathfrak{z}' = \frac{\mathfrak{z}_1' - a}{+iB}.$$

Die ihnen entsprechenden Kurven müssen also durch die entsprechenden Transformationen:

$$x = \frac{-z_1'}{B} \qquad\qquad z_1' = -Bx$$

$$z' = \frac{x_1 + a}{B} \qquad\qquad x_1 = Bz' - a$$

$$z = \frac{1}{B^2}(z_1 - x_1 z_1' - a z_1') \qquad\qquad z_1 = B^2(z - xz')$$

aus der Kurve (6) S. 7 entstehen.

Den Kegelschnitten (11) entsprechen also die reellen Kurven:

$$(12)\quad \begin{cases} x = \dfrac{B\sqrt{2}\,(t + t^3)}{1 + t^4} - a \\[2ex] z' = \dfrac{B\sqrt{2}\,(-t + t^3)}{1 + t^4} \\[2ex] z = \dfrac{B^2(1 - 2t^2 + 2t^6 - t^8)}{2(1 + t^4)^2}. \end{cases}$$

Eine reelle Mannigfaltigkeit, die einer Parabel entspricht, ist entweder ein Punkt oder eine Mannigfaltigkeit der Schar $z = \frac{1}{2} \alpha x^2 + bx + c$ (α, b, c reell).

Dieser Schar entsprechen die Parabeln:

$$\mathfrak{z} = 2ic - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2 \frac{1+\alpha^2}{(1-i\alpha)^2} + \frac{2\alpha b\mathfrak{x} + 2ib\mathfrak{x} - b^2 i\alpha + b^2}{(1-i\alpha)^2}.$$

Damit sie reell sind, ist nötig, daß $\alpha = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

Die Parabel heißt dann:

$$\mathfrak{z} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2$$
$$\mathfrak{z}' = -\mathfrak{x}.$$

Die ihr entsprechende Mannigfaltigkeit ist

$z' = 0$ $z = 0$, die x-Achse.

Den Punkten $x = a$, $z = c$ der Ebene entsprechen die Parabeln:

$$\mathfrak{z} = 2ic + \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2 + a^2 - 2a\mathfrak{x}$$
$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{x} - 2a.$$

Reellen Punkten (a und c reell) entsprechen dann und nur dann reelle Parabeln, wenn $c = 0$ ist.

Den reellen Punkten $x = a$ $z = 0$ der x-Achse entsprechen die reellen Parabeln:

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2 + a^2 - 2a\mathfrak{x}$$
$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{x} - 2a.$$

Resultat:

Die einzigen reellen Kegelschnitte der projektiven Ebene, denen reelle Mannigfaltigkeiten entsprechen, sind die ∞^2 Hyperbeln:

$$-B^2\left(\mathfrak{x} + a\right)^2 + \left(\mathfrak{z} - a\mathfrak{x} - \frac{a^2}{2}\right)^2 + B^4 = 0,$$

ferner die ∞^1 Parabeln $\mathfrak{z} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 + 2a\mathfrak{x} - a^2 = 0$, endlich die Parabel $\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 = 0$.

Den ∞^2 Hyperbeln entsprechen die reellen Kurven:

$$x = \frac{B\sqrt{2}\,(t + t^3)}{1 + t^4} - a.$$

$$z = \frac{B^2(1 - 2t^2 + 2t^6 - t^8)}{2(1 + t^4)^2}.$$

$$z' = \frac{B\sqrt{2}\,(-t + t^3)}{1 + t^4}.$$

Den Parabeln $\mathfrak{z} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 + 2a\mathfrak{x} - a^2 = 0$ entsprechen die Punkte der x-Achse:

$x = a$, $z = 0$.

Der Parabel $\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 = 0$ entspricht die x-Achse:

$z = 0$.

Diese Parabel ist die einzige reelle Mannigfaltigkeit der projektiven Ebene, deren sämtlichen reellen Elementen wieder reelle Elemente entsprechen; in der anderen Ebene ist die x-Achse die einzige Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft.

Die ∞^2 reellen Hyperbeln berühren diese Parabel in 2 reellen Elementen. Sie haben also 2 reelle Elemente, denen wieder reelle Elemente entsprechen. Bei den ihnen entsprechenden Kurven sind dies die beiden Rückkehrelemente.

Die ∞^1 reellen Parabeln $\mathfrak{z} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 + 2a\mathfrak{x} - a^2 = 0$ berühren die Parabel $\mathfrak{z} + \frac{1}{2}\mathfrak{x}^2 = 0$ je in einem endlichen reellen Element und in einem allen gemeinsamen unendlich fernen Element.

Dem endlichen Element entspricht das reelle Element: $x = a,\ z = 0,\ y = 0$.

Dem unendlich fernen gemeinsamen Element der ganzen Schar läßt sich aber kein gemeinsames Element der entsprechenden Schar gegenüberstellen. Denn die Punkte der x-Achse haben kein im Endlichen liegendes gemeinsames Element.

Kapitel II.

Die geraden Linien des dreidimensionalen projektiven Raumes und die ihnen entsprechenden Mannigfaltigkeiten.

Im dreidimensionalen Raum benutze ich x, y, z als Punktkoordinaten und x, y, z, p, q als Koordinaten eines Flächenelements.

Für unendlich benachbarte Elemente eines Elementvereins besteht dann die Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Als Koordinaten des projektiven Raumes nehme ich wieder die gestrichenen Buchstaben.

Die Transformation, die auf die projektive Gruppe ausgeübt werden muß, hat im Raum die Form:

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x' - p'}{2} & p = \dfrac{x' + p'}{2i} \\ y = \dfrac{y' - q'}{2} & q = \dfrac{y' + q'}{2i} \end{cases} \qquad z = \frac{z'}{2i} + \frac{1}{8i}\left\{\begin{matrix} x'^2 - 2x'p' - p'^2 \\ + y'^2 - 2y'q' - q'^2 \end{matrix}\right\}$$

oder nach $x'\ y'\ z'\ p'\ q'$ aufgelöst:

$$(13\text{a})\quad \begin{cases} x' = x + ip & p' = -x + ip \\ y' = y + iq & q' = -y + iq \end{cases} \qquad z' = 2iz - \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} x^2 + 2ipx + p^2 \\ + y^2 + 2iqy + q^2 \end{matrix}\right\}.$$

Wenn man zur Abkürzung schreibt:

$$S = x^2 + y^2 + p^2 + q^2$$
$$Z = z - \tfrac{1}{2}(px + qy),$$

geht die projektive Gruppe durch diese Transformation über in die Gruppe mit den charakteristischen Funktionen:

$$(14)\quad \boxed{\begin{matrix} 1,\ x,\ y,\ p,\ q,\ x^2 + p^2,\ xy + pq,\ y^2 + q^2,\ xq - yp,\ Z \\ 4xZ + pS,\ 4yZ + qS,\ 4pZ - xS,\ 4qZ - yS,\ 16Z^2 + S^2. \end{matrix}}$$

Den Punkten und Ebenen des projektiven Raumes entsprechen bei dieser Gruppe die beiden invarianten konjugiert imaginären Scharen von Mannigfaltigkeiten:

$$z = \pm \frac{i}{2}(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + b.$$

Ich will nun untersuchen, welche Mannigfaltigkeiten den geraden Linien des projektiven Raumes entsprechen.

Eine beliebige gerade Linie hat als Verein betrachtet die Gleichungen:

$$(15) \begin{cases} \dfrac{x' - a}{\alpha} = \dfrac{y' - b}{\beta} = \dfrac{z' - c}{\gamma} \\ p'\alpha + q'\beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Durch die Transformation (13a) geht sie in die Mannigfaltigkeit über:

$$(16) \begin{cases} \dfrac{x + ip - a}{\alpha} = \dfrac{y + iq - b}{\beta} = \dfrac{2iz - c - \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} x^2 + p^2 + 2ipx \\ + y^2 + q^2 + 2iqy \end{array} \right\}}{\gamma} \\ (-x + ip)\alpha + (-y + iq)\beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen, die z nicht enthalten, lassen sich nach p und q auflösen, wenn $\alpha^2 + \beta^2$ von Null verschieden ist, was bei einer reellen Geraden darauf hinauskommt, daß sie nicht parallel zur z'-Achse ist.

Wenn man die Werte von p und q in eine der Gleichungen einsetzt, in der z vorkommt, erhält diese Gleichung die Form:

$$(17)\ (\alpha^2 + \beta^2)(2iz - c) = \left\{ \begin{array}{l} x^2(\alpha^2 - \beta^2) + y^2(\beta^2 - \alpha^2) + 4xy\alpha\beta + 2x(a\beta^2 - b\alpha\beta + \alpha\gamma) + \\ + 2y(b\alpha^2 - a\alpha\beta + \beta\gamma) - a\alpha\gamma - b\beta\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}(a\beta - b\alpha)^2 \end{array} \right\}.$$

Den Geraden (15) des projektiven Raumes entsprechen also die imaginären Flächen zweiten Grades (17). Dabei sind aber gewisse Geraden verloren gegangen. Die ihnen entsprechenden Mannigfaltigkeiten sind in den Elementkoordinaten x, y, z, p, q nicht darstellbar, sollen daher hier nicht weiter berücksichtigt werden.

Die Gleichungen (16) stellen eine bei der Gruppe (14) invariante Schar von ∞^8 Mannigfaltigkeiten dar. Ich will nun untersuchen, ob in dieser Schar reelle Flächen enthalten sind.

Ich trenne deshalb das Reelle vom Imaginären.

Die erste Gleichung wird dabei:

$$(\beta_1 x - \beta_2 p - a_1\beta_1 + a_2\beta_2) + i(\beta_2 x + \beta_1 p - a_1\beta_2 - a_2\beta_1) =$$
$$= (\alpha_1 y - \alpha_2 q - \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) + i(\alpha_2 y + \alpha_1 q - b_1\alpha_2 - b_2\alpha_1)$$

und die letzte wird:

$$(-\alpha_1 x - \alpha_2 p - \beta_1 y - \beta_2 q - \gamma_1) + i(\alpha_1 p - \alpha_2 x + \beta_1 q - \beta_2 y - \gamma_2) = 0.$$

Wenn die Fläche ein reelles Element enthält, so müssen für die Koordinaten dieses Elements die reellen und imaginären Bestandteile der Gleichungen für sich verschwinden. Dann müssen also die 4 Gleichungen bestehen:

$$(18) \begin{cases} \beta_1 x - \alpha_1 y - \beta_2 p + \alpha_2 q = -\alpha_1 b_1 + a_1\beta_1 + \alpha_2 b_2 - a_2\beta_2. \\ \beta_2 x - \alpha_2 y + \beta_1 p - \alpha_1 q = -\alpha_1 b_2 + a_1\beta_2 - \alpha_2 b_1 + a_2\beta_1. \\ -\alpha_1 x - \beta_1 y - \alpha_2 p - \beta_2 q = \gamma_1. \\ -\alpha_2 x - \beta_2 y + \alpha_1 p + \beta_1 q = \gamma_2. \end{cases}$$

Die Determinante dieser 4 Gleichungen ist:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2.$$

Sie verschwindet also nur dann, wenn $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ ist. Die Geraden, für die α und β beide Null sind, sollten ja aber von dieser Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Die Gleichungen (18) sind also nach $x\ y\ p\ q$ auflösbar:

$$x = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}\left\{a_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) - b_1(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + b_2(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) - \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2\right\}.$$

$$y = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}\left\{-a_1(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + b_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + a_2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2\right\}.$$

$$p = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}\left\{b_1(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) + a_2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - b_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\right\}.$$

$$q = \frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}\left\{a_1(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) - a_2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + b_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\right\}.$$

Diejenige der Gleichungen (16), die z enthält, kann geschrieben werden:

$$\left\{x + ip - (a_1 + ia_2)\right\}\frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{\alpha_1 + i\alpha_2} = i\left\{2z - px - qy - c_2\right\} - \tfrac{1}{2}\left\{x^2 + p^2 + y^2 + q^2\right\} - c_1.$$

Die Fläche enthält nur dann ein reelles Element, wenn auch z reell wird. Dann muß in dieser Gleichung der reelle Teil verschwinden.

$$\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\left\{(x - a_1)(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) - (p - a_2)(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{x^2 + p^2 + y^2 + q^2\right\} = -c_1.$$

Setzt man hier für x, y, p, q die obigen Werte ein, so erhält diese Bedingung die Form:

$$(19)\quad -2c_1 = \frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2+\beta_2^2}\left\{\begin{array}{l}(a_1^2 + a_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \\ - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - \\ - 2(a_1b_1 + a_2b_2)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) - 2(a_1b_2 - a_2b_1) \\ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - 2a_1(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) + 2a_2(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) - \\ - 2b_1(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) + 2b_2(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\end{array}\right\}.$$

Diese Gleichung (19) ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche, die einer Geraden entspricht, ein reelles Flächenelement enthält.

Sicher enthält die Fläche nur ein einziges reelles Element, denn für z ergibt sich jetzt auch ein ganz bestimmter Wert.

Da die Bedingung (19) nur eine Gleichung enthält, gibt es unter den ∞^8 Geraden ∞^7, denen eine Fläche mit einem einzigen reellen Element entspricht. Die den übrigen Geraden entsprechenden Flächen haben gar kein reelles Element.

Die Schar der ∞^7 Flächen mit einem reellen Element ist natürlich bei der Gruppe (14) invariant, wenn man diese als reelle Gruppe ansieht.

Beispiel:

Als Beispiel wähle ich eine Gerade mit möglichst einfachen Konstanten:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2} \quad \alpha_2 = 0 \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2} \quad \beta_2 = 0 \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \gamma_2 = 0$$
$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 0 \quad c_2 = 0.$$

Den Wert von c_1 lasse ich beliebig.

Die Bedingung (19) lautet jetzt:

$$-2c_1 = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$c_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Die Gerade hat die Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y'}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z'-c_1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ p'\cdot\tfrac{1}{2} + q'\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{oder:} \begin{cases} x' = y',\ z' = c_1 + x'\sqrt{2} \\ p' + q' - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen gehen bei der Transformation (13) über in:

$$x + ip = y + iq$$
$$2iz - \tfrac{1}{2}\begin{Bmatrix} x^2 + 2ipx + p^2 + \\ + y^2 + 2iqy + q^2 \end{Bmatrix} = c_1 + (x+ip)\sqrt{2}$$
$$-x + ip - y + iq - \sqrt{2} = 0.$$

Daher bestehen für reelle Elemente die Gleichungen:

$$x = y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad z = 0$$
$$-\tfrac{1}{2}\{x^2 + p^2 + y^2 + q^2\} = c_1 + x\sqrt{2}$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = c_1 - 1$$
$$c_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Also enthält die entsprechende Fläche wirklich dann und nur dann ein reelles Element, wenn c_1 entsprechend der Bedingung (19) den Wert $\frac{1}{2}$ hat.

Ich will nun untersuchen, was die Bedingung (19) geometrisch bedeutet.

Die sämtlichen reellen Flächenelemente des projektiven Raumes, denen reelle Elemente entsprechen, haben die Form:

$$\begin{matrix} x' = x + ip, & y' = y + iq, \\ p' = -x + ip, & q' = -y + iq, \end{matrix} \quad z' = 2iz - \tfrac{1}{2}\begin{Bmatrix} x^2 + 2ipx + p^2 + \\ + y^2 + 2iqy + q^2 \end{Bmatrix}$$

wo $x', y', z', p', q', x, y, z, p, q$ reell sind.

Daher müssen die Gleichungen bestehen:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad z = 0.$$

Dann wird:

$$\begin{matrix} x' = x = u & p' = -u \\ y' = y = v & q' = -v \end{matrix} \quad z' = -\tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) \qquad (u, v \text{ reell}).$$

Durch Elimination von u und v ergibt sich:

$$(20) \begin{cases} z' = -\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) \\ p' = -x' \\ q' = -y'. \end{cases}$$

Alle reellen Elemente des projektiven Raumes, denen reelle Elemente entsprechen, liegen auf einem elliptischen Paraboloid $z' + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 0$.

Ihm entspricht die Ebene $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$. Umgekehrt entspricht jedem reellen Element des Paraboloids ein reelles Element der Ebene $p = 0$, $q = 0$, $z = 0$.

Wenn also eine gerade Linie mit dem Paraboloid (20) ein reelles Element gemeinsam hat, so hat die ihr entsprechende Fläche sicher ein reelles Element.

Das Paraboloid (20) enthält das reelle Element:

$$(21) \quad x' = 0 \quad y' = 0 \quad z' = 0 \quad p' = 0 \quad q' = 0$$

und durch dies Element geht die Gerade:

$$(22) \quad x' = 0, \quad y' = -2s, \quad z' = 0, \quad p' = -2t, \quad q' = 0$$

(wo s und t variable Parameter sind, durch die die einzelnen Elemente der Geraden bestimmt werden).

Dem Flächenelement (21) entspricht das reelle Element:

$$(23) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

und der Geraden (22) die Fläche:

$$(24) \quad x = t, \quad y = -s, \quad p = it, \quad q = is, \quad z = \frac{1}{2i}(s^2 - t^2).$$

Das Flächenelement (21) ist invariant bei den 10 eingliedrigen projektiven Gruppen:

$$(25) \quad \begin{array}{c} x'p', \ y'p', \ z'p', \ x'q', \ y'q', \ z'q, \ -z', \ x'^2p' + x'y'q' - x'z'. \\ x'y'p' + y'^2q' - y'z', \ \ x'z'p' + y'z'q' - z'^2, \end{array}$$

wird also nur von den von diesen und von einander unabhängigen eingliedrigen Gruppen:

$$(26) \quad p' + x', \quad q' + y', \quad p' - x', \quad q' - y', \quad -1$$

und den von ihnen linear ableitbaren in andere Elemente übergeführt.

Ebenso ist natürlich das Flächenelement (23) invariant bei allen eingliedrigen Gruppen, die den Gruppen (25) entsprechen und wird in alle Flächenelemente des Raumes übergeführt durch die Gruppen, die den Gruppen (26) entsprechen und den aus ihnen linear ableitbaren.

Den Gruppen (26) entsprechen die Gruppen:

$$p, \quad q, \quad ix, \quad iy, \quad \tfrac{1}{2}i.$$

In reelle Elemente wird das Element (23) also nur durch die Gruppen:

$$\varrho p + \sigma q + \lambda x + \mu y + \nu$$

übergeführt, wo ϱ, σ, λ, μ, ν reell sind.

Diesen Gruppen entsprechen im projektiven Raum:

$$\varrho(p' + x') + \sigma(q' + y') + \lambda i(x' - p') + \mu i(y' - q') + 2i\nu.$$

Bei diesen Gruppen werden die ∞^2 Geraden, die durch das Flächenelement $x' = 0$ $y' = 0$ $z' = 0$ $p' = 0$ $q' = 0$ gehen, in alle Geraden übergeführt, denen Flächen mit einem reellen Element entsprechen.

Die reellen Geraden, die durch das Element gehen, werden dabei durch die reellen Gruppen

$$\varrho(p' + x') + \sigma(q' + y')$$

wieder in reelle Geraden übergeführt und die imaginären in imaginäre.

Bei diesen Gruppen ist die Fläche $z' + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = 0$ invariant. Daher werden bei diesen Gruppen die Geraden des Elements in solche Geraden übergeführt, die dies Paraboloid berühren. Daraus folgt: Allen reellen Geraden, die das Paraboloid $z' + \frac{1}{2}x'^2 + y'^2 = 0$ berühren, entsprechen Flächen mit einem reellen Element.

Um zu untersuchen, ob es noch andre reelle Gerade gibt, denen Flächen mit reellem Element entsprechen, transformiere ich die Gerade

$$x' = 0,\ z' = 0,\ q' = 0\ \ y' = -2s,\ p' = -2t$$

so, daß das Flächenelement $x' = 0\ y' = 0\ z' = 0\ p' = 0\ q' = 0$ invariant bleibt; z. B. durch die Gruppe $y'p'$ mit den endlichen Gleichungen:

$$x'_1 = x' + y'(\alpha_1 + i\alpha_2) \qquad y'_1 = y' \qquad p'_1 = p'$$
$$q'_1 = q' - p'(\alpha_1 + i\alpha_2) \qquad z'_1 = z'.$$

Alle Geraden, die durch das Element gehen, sind demnach durch die Gleichungen dargestellt:

$$(26)\ \begin{cases} x' = -2s(\alpha_1 + i\alpha_2) \qquad y' = -2s \qquad z' = 0 \\ p' = -2t \qquad q' = 2t(\alpha_1 + i\alpha_2) \\ (\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ reell, } t \text{ und } s \text{ beliebig komplex}). \end{cases}$$

Die imaginären Geraden von (26) könnten eventuell durch eine Gruppe mit der charakteristischen Funktion $\lambda i(x' - p') + \mu i(y' - q') + \nu \cdot 2i$ in eine reelle Gerade übergeführt werden, auch wenn λ, μ, ν reell sind.

Die drei Gruppen $i(x' - p')$ $i(y' - q')$, $2i$ haben die endlichen Gleichungen

$$x'_1 = x' + ia \qquad y'_1 = y' + ib$$
$$p'_1 = p' + ia \qquad q'_1 = q' + ib$$
$$z'_1 = z' + iax' + iby' + 2ic - \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}b^2$$
$$(a,\ b,\ c \text{ reell}).$$

Durch diese Transformation entsteht aus (26) die Geradenschar:

$$(27)\ \begin{cases} x' = -2s(\alpha_1 + i\alpha_2) + ia, \qquad y' = -2s + ib \\ p' = -2t + ia \qquad q' = 2t(\alpha_1 + i\alpha_2) + ib. \\ z' = -2ias(\alpha_1 + i\alpha_2) - 2ibs + 2ic - \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}b^2. \end{cases}$$

Wenn a, b, c, α_2 von Null verschieden sind, haben die Geraden (27) im allgemeinen kein reelles Element. Sie können aber ein einziges reelles Element haben. Denn aus den ersten 4 Gleichungen folgt, daß x' y' p' q' dann und nur dann reell werden, wenn

$$-2s = \frac{a + b\alpha_1}{\alpha_2} - ib,\ -2t = \frac{b + a\alpha_1}{\alpha_2} - ia.$$

Ob dann auch z' reell wird, hängt vom Wert von c ab.

Wenn a, b, c und α_2 sämtlich Null sind, haben die Geraden (27) dagegen für reelle Werte von t und s ∞^2 reelle Elemente, sind also reelle Geraden.

Dann berühren aber die Geraden das Paraboloid $z' + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = 0$.

Resultat:

Reellen Geraden entsprechen dann und nur dann Flächen mit einem reellen Element, wenn sie das Paraboloid $z' + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 0$ berühren.

Die sämtlichen imaginären Geraden, denen Flächen mit einem reellen Element entsprechen, erhält man, wenn man auf die Schar (27) noch die Gruppen:

$$x' + p', \qquad y' + q'$$

mit den endlichen Gleichungen:

$$\begin{matrix} x_1' = x' + u & p_1' = p' - u \\ y_1' = y' + v & q_1' = q' - v \end{matrix} \qquad z_1' = z' - ux' - vy' - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

ausübt.

Die ∞^7 Graden erhalten dann die Gleichungen:

$$(28)\begin{cases} x' = -2s(\alpha_1 + i\alpha_2) + ia + u, \quad y' = -2s + ib + v \\ p' = -2t + ia - u, \quad q' = 2t(\alpha_1 + i\alpha_2) + ib - v. \\ z' = \{-2ias(\alpha_1 + i\alpha_2) - 2ibs + 2ic + 2us(\alpha_1 + i\alpha_2) - iau + 2vs - ibv - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + a^2 + b^2)\}. \end{cases}$$

Ihnen entsprechen die ∞^7 Flächen:

$$(29)\begin{cases} x = t - s(\alpha_1 + i\alpha_2) + u, \qquad y = -s - t(\alpha_1 + i\alpha_2) + v \\ p = it + is(\alpha_1 + i\alpha_2) + a, \quad q = is - it(\alpha_1 + i\alpha_2) + b \\ z = \left\{\frac{1}{2i}(s^2 - t^2)(1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2i\alpha_1\alpha_2) + at - bs - as(\alpha_1 + i\alpha_2) - bt(\alpha_1 + i\alpha_2) + c\right\} \end{cases}$$

wo s und t variable Parameter sind, die die einzelnen Elemente bestimmen.

Sie haben das reelle Element:

$$x = u, \quad y = v, \quad p = a, \quad q = b, \quad z = c$$

für die Werte $t = s = 0$.

Diesen reellen Elementen entsprechen im projektiven Raum die Elemente:

$$\begin{matrix} x' = u + ia, & y' = v + ib \\ p' = -u + ia, & q' = -v + ib \end{matrix} \qquad z' = \{2ic - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + a^2 + b^2) - iau - ibv\}.$$

Durch Elimination von a und b erhält man die Flächen, die den reellen Punkten des Raumes entsprechen:

$$(30)\begin{cases} z' = ic + \tfrac{1}{2}x'^2 + \tfrac{1}{2}y'^2 - 2x'u - 2y'v + u^2 + v^2 \\ \qquad p' = x' - 2u, \quad q' = y' - 2v. \end{cases}$$

Die reellen Flächenelemente des Raumes $x\,y\,z$ lassen sich natürlich auch so zusammenfassen, daß sie die reellen Ebenen bilden:

$$\begin{matrix} x = u & y = v \\ p = a & q = b \end{matrix} \qquad z = au + bv + c_1.$$

Diesen Elementen entsprechen im projektiven Raum die Elemente:

$$\begin{matrix} x' = u + ia & y' = v + ib \\ p' = -u + ia & q' = -v + ib \end{matrix} \qquad z' = \{2ic_1 + iau + ibv - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + a^2 + b^2)\}.$$

Eliminiert man jetzt u und v, so erhält man die reellen Ebenen des Raumes $x\ y\ z$:

$$z = ax + by + c_1$$
$$p = a, \quad q = b$$

und die ihnen entsprechenden Flächen:

$$(31)\begin{cases} z' = -\tfrac{1}{2}x'^2 - \tfrac{1}{2}y'^2 + 2iax' + 2iby' + a^2 + b^2 + 2ic_1 \\ \qquad p' = -x' + 2ia, \quad q' = -y' + 2ib. \end{cases}$$

Ein reelles Element des Raumes $x\,y\,z$ liegt immer auf einem einzigen reellen Punkt und auf einer einzigen reellen Ebene. Das ihm entsprechende Element liegt also auf einer Fläche (30) und auf einer Fläche (31).

Jeder reelle Punkt hat aber mit ∞^2 reellen Ebenen ein reelles Element gemeinsam. Also wird jede Fläche (30) von ∞^2 Flächen (31) berührt. Ebenso wird jede Fläche (31) von ∞^2 Flächen (30) berührt.

Die Tangenten der Flächen (30) in den Punkten, in denen sie von den Flächen (31) berührt werden, sind diejenigen Geraden, denen Flächen mit einem reellen Flächenelement entsprechen.

Die Schar (31) enthält nur eine reelle Fläche:

$$z' + \tfrac{1}{2} x'^2 + \tfrac{1}{2} y'^2 = 0.$$

Die Schar (30) enthält ∞^2 reelle Flächen:

$$z' = \tfrac{1}{2} x'^2 + \tfrac{1}{2} y'^2 - 2x'u - 2y'v + u^2 + v^2.$$

Sie hüllen das Paraboloid $z' + \tfrac{1}{2}x'^2 + \tfrac{1}{2}y'^2 = 0$ ein und haben mit ihm ∞^4 Tangenten gemeinsam, von denen ∞^3 reell sind, die sämtlichen reellen Tangenten von $z' + \tfrac{1}{2}x'^2 + \tfrac{1}{2}y'^2 = 0$.

Kapitel III.

Die ebenen Mannigfaltigkeiten im projektiven R_{n+1} und die ihnen entsprechenden Mannigfaltigkeiten.

Im Raum von $n+1$ Dimensionen benutze ich $z,\ x_1 \dots x_n$ als Punktkoordinaten und $z,\ x_1 \dots x_n\ p_1 \dots p_n$ als Koordinaten eines Flächenelements.

Die projektive Gruppe wird durch die Transformation:

$$(32)\quad \begin{cases} x_r = \dfrac{x'_r - p'_r}{2} \qquad p_r = \dfrac{x'_r + p'_r}{2i} \\[2ex] z = \dfrac{z'}{2i} + \dfrac{1}{8i} \sum\limits_1^n{}_\tau \left(x'^2_\tau - 2x'_\tau p'_\tau - p'^2_\tau\right) \end{cases}$$

in die Gruppe übergeführt:

$$(33)\quad \boxed{\begin{gathered} 1,\ x_\mu,\ p_\mu,\ x_\mu x_\nu + p_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\ Z; \\ 4x_\mu Z + p_\mu S,\ 4p_\mu Z - x_\mu S,\ 16Z^2 + S^2, \\ (\mu,\ \nu = 1 \dots n). \\ \left(Z = z - \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\tau (x_\tau p_\tau),\quad S = \sum_1^n{}_\tau \left(x_\tau^2 + p_\tau^2\right)\right) \end{gathered}}$$

Die ebenen $n - \varrho$ fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des projektiven Raumes können durch projektive Transformationen alle aus der ebenen Mannigfaltigkeit erzeugt werden:

$$(34)\quad \begin{cases} z' = 0,\ x'_1 = 0,\ x'_2 = 0, \dots x'_\varrho = 0,\ p'_{\varrho+1} = 0 \dots p'_n = 0 \\ p'_1 = -2t_1,\ p'_2 = -2t_2, \dots p'_\varrho = -2t_\varrho,\ x'_{\varrho+1} = -2s_{\varrho+1} \dots x'_n = -2s_n. \end{cases}$$

Ihr entspricht die Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$(35)\quad \begin{cases} z = \frac{1}{8i}(4s_{\rho+1}^2 \ldots + 4s_n^2 - 4t_1^2 \ldots - 4t_\rho^2) \\ x_1 = t_1 \ldots\ldots x_\rho = t_\rho \qquad x_{\rho+1} = -s_{\rho+1} \ldots\ldots x_n = -s_n \\ p_1 = it_1 = ix_1 \ldots p_\rho = it_\rho = ix_\rho \qquad p_{\rho+1} = is_{\rho+1} = -ix_{\rho+1} \ldots p_n = is_n = -ix_n. \end{cases}$$

Eliminiert man die t und s, so heißt die Mannigfaltigkeit:

$$(36)\quad \begin{cases} z = \frac{1}{2i}\left\{\sum_{\rho+1}^{n} l\, x_l^2 - \sum_{1}^{\rho} k\, x_k^2\right\} \\ p_k = ix_k \qquad p_l = -ix_l \\ (k = 1 \ldots \varrho, \quad l = \varrho + 1 \ldots n). \end{cases}$$

Die ebene Mannigfaltigkeit (34) bleibt bei allen projektiven eingliedrigen Gruppen invariant, deren infinitesimale Transformationen von 2ter Ordnung in den z' x' sind, ferner bei den Gruppen:

$$p'_l, \quad x'_k p'_l, \quad -x'_k, \quad x'_k p'_j, \quad z' p'_k, \quad z' p'_l, \quad -z', \quad x'_l p'_m$$
$$(j, k = 1 \ldots \varrho;\ m, l = \varrho + 1 \ldots n.)$$

Sie wird also durch die von diesen und voneinander unabhängigen $(\varrho + 1) \cdot (n - \varrho + 1)$ eingliedrigen Gruppen:

$$(37)\quad \begin{cases} p'_k + x'_k, \quad p'_l + x'_l, \quad -1 \\ \qquad x'_l p'_k \end{cases}$$

in sämtliche ebenen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension $n - \varrho$ übergeführt.

Die entsprechende Mannigfaltigkeit (36) wird durch die eingliedrigen Gruppen, die den Gruppen (37) entsprechen, in sämtliche Mannigfaltigkeiten übergeführt, die den ebenen Mannigfaltigkeiten entsprechen.

Bis auf konstante Faktoren entsprechen den Transformationen $p'_k + x'_k$, $p'_l + x'_l$, -1 die Gruppen: p_k, p_l, -1.

Der Gruppe $x'_l p_k$ entspricht die Gruppe:

$$\frac{1}{2i}\{(-x_l x_k - p_l p_k) + i(x_l p_k - p_l x_k)\}$$

mit den endlichen Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_k = x_k + \frac{\alpha_{lk}}{2} x_l + \frac{i\alpha_{lk}}{2} p_l$$

$$\mathfrak{p}_k = p_k + \frac{\alpha_{lk}}{2i} x_l + \frac{\alpha_{lk}}{2} p_l$$

$$\mathfrak{x}_l = x_l - \frac{\alpha_{lk}}{2} x_k + \frac{i\alpha_{lk}}{2} p_k$$

$$\mathfrak{p}_l = p_l - \frac{i\alpha_{lk}}{2} x_k - \frac{\alpha_{lk}}{2} p_k$$

$$\mathfrak{z} = z + \frac{1}{8i}\left[4\alpha_{lk}(x_k x_l - p_k p_l) + \alpha_{lk}^2(x_l^2 - x_k^2) + 2i(x_l p_l + x_k p_k) - p_l^2 + p_k^2\right].$$

Wendet man diese Transformation auf die Gleichungen (36) an, so erhält man aus den Gleichungen, die z nicht enthalten, wenn man statt der deutschen Buchstaben wieder lateinische schreibt:

$$p_l = \frac{2\,i\,\alpha_{lk}\,x_k - i\,x_l\,(1-\alpha_{lk}^2)}{1+\alpha_{lk}^2}$$

$$p_k = \frac{i\,x_k\,(1-\alpha_{lk}^2) + 2\,i\,\alpha_{lk}\,x_l}{1+\alpha_{lk}^2};$$

und aus der Gleichung, die z enthält, erhält man, wenn man zugleich diese Werte von p_l und p_k einsetzt:

$$(38)\quad \begin{aligned} z = {} & \frac{1}{2\,i\,(1+\alpha_{lk}^2)}\left\{(x_l^2 - x_k^2)(1-\alpha_{lk}^2) - 4\alpha_{lk}x_l x_k\right\} + \\ & + \frac{1}{2i}\left(x_{\rho+1}^2 \ldots + x_{l-1}^2 + x_{l+1}^2 \ldots x_n^2 - x_1^2 \ldots - x_{k-1}^2 - x_{k+1}^2 \ldots - x_\rho^2\right). \end{aligned}$$

Wendet man auf diese Fläche (38) die Gruppe an, die $x'_l\,p'_h$ entspricht, so erhält man die Fläche:

$$(39)\quad z = \frac{1}{2\,i\,(1+\alpha_{lk}^2+\alpha_{lh}^2)}\left\{\begin{array}{l} x_l^2\,(1-\alpha_{lk}^2-\alpha_{lh}^2) - 4\,\alpha_{lk}x_k x_l - \\ - x_k^2\,(1-\alpha_{lk}^2+\alpha_{lh}^2) - 4\,\alpha_{lh}x_h x_l \\ - x_h^2\,(1+\alpha_{lk}^2-\alpha_{lh}^2) + 4\alpha_{lk}\alpha_{lh}x_h x_k \end{array}\right\} + \frac{1}{2i}\left(\sum_{\substack{m=\rho+1 \\ m \neq l}}^{n} x_m^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h,\, j\neq k}}^{\rho} x_j^2\right).$$

Wendet man aber auf (38) die Gruppe an, die $x'_m\,p'_k$ entspricht, so erhält man die Fläche:

$$(40)\quad z = \frac{1}{2\,i\,(1+\alpha_{lk}^2+\alpha_{mk}^2)}\left\{\begin{array}{l} x_l^2(1-\alpha_{lk}^2+\alpha_{mk}^2) - 4\,\alpha_{lk}x_k x_l \\ + x_m^2(1+\alpha_{lk}^2-\alpha_{mk}^2) - 4\,\alpha_{mk}x_k x_m \\ - x_k^2(1-\alpha_{lk}^2-\alpha_{mk}^2) - 4\,\alpha_{mk}\alpha_{lk}x_m x_l \end{array}\right\} + \frac{1}{2i}\left\{\sum_{\substack{r=\rho+1 \\ r\neq l,\; r\neq m}}^{n} x_r^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\rho} x_j^2\right\}.$$

Wendet man auf (38) alle Transformationen an, die den Gruppen $x'_l\,p'_k$ $(k=1\ldots\rho\;\; l=\rho+1\ldots n)$ entsprechen, und sodann noch alle Transformationen der Gruppen $p_1 \ldots p_n$, -1, so erhält die Schar der Mannigfaltigkeiten, die den ebenen Mannigfaltigkeiten des projektiven Raums entsprechen, bei passender Wahl der Konstanten die Gleichung:

$$(41)\quad z = \frac{1}{2i\left\{1+\sum\limits_{k=1}^{\rho}\sum\limits_{l=\rho+1}^{n}\alpha_{lk}^2\right\}}\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{l=\rho+1}^{n}\left\{x_l^2\left[1+\sum\limits_{h=1}^{\rho}\;\sum\limits_{m}^{\rho+1\ldots l-1,\; l+1\ldots n}\alpha_{hm}^2 - \sum\limits_{h=1}^{\rho}\alpha_{hl}^2\right] - \right. \\ - \sum\limits_{k=1}^{\rho}\left\{x_k^2\left[1+\sum\limits_{m=\rho+1}^{n}\;\sum\limits_{h}^{1\ldots k-1,\; k+1\ldots\rho}\alpha_{hm}^2 - \sum\limits_{m=\rho+1}^{n}\alpha_{km}^2\right.\right\} \\ -4\sum\limits_{k=1}^{\rho}\sum\limits_{l=\rho+1}^{n}\alpha_{kl}\,x_k\,x_l \\ +4\sum\limits_{l=\rho+1}^{n}\;\sum\limits_{\substack{h,k = 1\ldots\rho \\ h\neq k}}\alpha_{kl}\alpha_{hl}x_k x_h - 4\sum\limits_{k=1}^{\rho}\;\sum\limits_{\substack{m,l=\rho+1\ldots n \\ m\neq l}}\alpha_{km}\alpha_{kl}x_m x_l \end{array}\right\} + \sum_{\tau=1}^{n} a_\tau x_\tau + b.$$

Die Gleichung (41) enthält $\varrho\,(n-\varrho)+n+1$ Konstanten. Sie enthält also $\infty^{2(\rho n-\rho^2+n+1)}$ komplexe Flächen. Diese können sämtlich höchstens ein reelles Flächenelement enthalten und zwar gibt es $\infty^{2(\rho n-\rho^2+n+1)-1}$ Flächen, die ein solches reelles Flächenelement enthalten. Die übrigen haben kein reelles Element.

Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die Gleichungen der ebenen Mannigfaltigkeit, der die Fläche (41) entspricht, z' enthalten, was bei einer reellen ebenen Mannigfaltigkeit bedeutet, daß sie nicht zur z' Achse parallel ist.

Die Gleichungen einer $(n-\varrho)$fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit, die z' enthalten, können nämlich immer nach z' und ϱ von den x' so aufgelöst werden, daß in den ersten $\varrho+1$ Gleichungen die p' nicht vorkommen. Nennt man die x', nach denen die Gleichungen so aufgelöst sind, $x'_1 \ldots x'_\rho$, so können die Gleichungen immer geschrieben werden:

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
&z'-(a_{\rho+1}+i\alpha_{\rho+1})\,x'_{\rho+1}\cdots\cdots-(a_n+i\alpha_n)\,x'_n-(b+i\beta)=0\\
&x'_1-(a_{1\rho+1}+i\alpha_{1\rho+1})\,x'_{\rho+1}\cdots\cdots-(a_{1n}+i\alpha_{1n})\,x'_n-(b_1+i\beta_1)=0\\
&\vdots\\
&x'_\rho-(a_{\rho\rho+1}+i\alpha_{\rho\rho+1})\,x'_{\rho+1}\cdots\cdots-(a_{\rho n}+i\alpha_{\rho n})\,x'_n-(b_\rho+i\beta_\rho)=0\\
&p'_{\rho+1}-(a_{\rho+1}+i\alpha_{\rho+1})+p'_1\,(a_{1\rho+1}+i\alpha_{1\rho+1})\cdots+p'_\rho\,(a_{\rho\rho+1}+i\alpha_{\rho\rho+1})=0\\
&\vdots\\
&p'_n-(a_n+i\alpha_n)+p'_1\,(a_{1n}+i\alpha_{1n})\cdots\cdots+p'_\rho\,(a_{\rho n}+i\alpha_{\rho n})=0
\end{aligned}
$$

(a und α sind reelle Parameter).

Die Gleichungen (42) gehen durch die Transformation (32) über in:

$$
(43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&2iz-\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{\tau}\,(x_\tau^2+2ix_\tau p_\tau+p_\tau^2)-(a_{\rho+1}-i\alpha_{\rho+1})\,(x_{\rho+1}+ip_{\rho+1})-\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots-(a_n+i\alpha_n)\,(x_n+ip_n)-(b_1+i\beta_1)=0.\\
&(x_k+ip_k)-(a_{k\rho+1}+i\alpha_{k\rho+1})\,(x_{\rho+1}+ip_{\rho+1})\cdots-(a_{kn}+i\alpha_{kn})\,(x_n+ip_n)-(b_k+i\beta_k)=0.\\
&(-x_l+ip_l)+(a_{1l}+i\alpha_{1l})\,(-x_1+ip_1)\cdots+(a_{\rho l}+i\alpha_{\rho l})\,(-x_\rho+ip_\rho)-(a_l+i\alpha_l)=0.\\
&\qquad\qquad(k=1\ldots\varrho,\quad l=\varrho+1\ldots n).
\end{aligned}
\right.
$$

Trennt man in den n Gleichungen (43), die z nicht enthalten, das Reelle vom Imaginären, so erhält man für ein reelles Element, das den Gleichungen (43) genügen soll, $2n$ lineare Gleichungen mit den $2n$ Unbekannten $p_1\ldots p_n$, $x_1\ldots x_n$.

Diese Gleichungen liefern für die x und p immer eine ganz bestimmte Lösung, denn die Determinante der Gleichungen kann nicht Null werden.

Diese Determinante heißt nämlich:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0\;0 \ldots\ldots & 0 & -a_{1\rho+1} & \alpha_{1\rho+1} \cdots & -a_{1n} & \alpha_{1n} \\
0 & 1 & 0 \ldots\ldots & 0 & -\alpha_{1\rho+1} & -a_{1\rho+1} \cdots & -\alpha_{1n} & -a_{1n} \\
0 & & 1 & & & & & \\
\vdots & & 1 & 0 & -a_{\rho\rho+1} & \alpha_{\rho\rho+1} \cdots & -a_{\rho n} & \alpha_{\rho n} \\
0 & & 0 & 1 & -\alpha_{\rho\rho+1} & -a_{\rho\rho+1} & -\alpha_{\rho n} & -a_{\rho n} \\
a_{1\rho+1} & \alpha_{1\rho+1} \cdots\cdots a_{\rho\rho+1} & & \alpha_{\rho\rho+1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_{1\rho+1} & a_{1\rho+1} \cdots -\alpha_{\rho\rho+1} & & a_{\rho\rho+1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{1n} & \alpha_{1n} \cdots\cdots a_{\rho n} & & \alpha_{\rho n} & 0 & & 1 & 0 \\
-\alpha_{1n} & a_{1n} \cdots -\alpha_{\rho n} & & a_{\rho n} & 0 & & 0 & 1
\end{vmatrix}.$$

Sie hat den Wert 1 + der Summe der Quadrate sämtlicher Glieder und Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix}
a_{1\rho+1} & \alpha_{1\rho+1} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{\rho\rho+1} & \alpha_{\rho\rho+1} \\
-\alpha_{1\rho+1} & a_{1\rho+1} \cdots\cdots\cdots\cdots & -\alpha_{\rho\rho+1} & a_{\rho\rho+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1n} & \alpha_{1n} \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{\rho n} & \alpha_{\rho n} \\
-\alpha_{1n} & a_{1n} \cdots\cdots\cdots\cdots & -\alpha_{\rho n} & a_{\rho n}
\end{vmatrix}.$$

Da alle a und α reell sind, so sind die Quadrate alle positiv oder Null, die Determinante ist daher sicher größer als 1 oder wenigstens gleich 1.

Diejenige Gleichung (43), die z enthält, liefert zu dem einzigen reellen Wertsystem der x und p einen ganz bestimmten Wert für z, der nur dann reell ist, wenn die $2(\varrho(n-\varrho)+n+1)$ reellen Konstanten der Gleichung eine Bedingung erfüllen. Der reelle Teil dieser Gleichung muß nämlich identisch verschwinden, weil z den Faktor $2i$ hat.

Es gibt also in der Tat in der Schar (43) oder, was dasselbe ist, in der Schar (41) nur $\infty^{2\{\rho n-\rho^2+n+1\}-1}$ Flächen mit einem einzigen reellen Flächenelement. Alle übrigen Flächen der Schar haben kein reelles Element.

Die reellen Elemente des Raumes xpz lassen sich in 2 verschiedenen Weisen zu ∞^{n+1} ebenen Mannigfaltigkeiten zusammenfassen, die den ganzen Raum ausfüllen. Sie liegen auf den Punkten und den $n$fach ausgedehnten Ebenen.

Die ihnen entsprechenden Elemente sind also die gemeinsamen Elemente von zwei Flächenscharen des projektiven Raumes, die je ∞^{n+1} Flächen enthalten. Die eine entspricht den Punkten, die andre den $n$fach ausgedehnten Ebenen des Raumes xpz.

Jede Fläche der einen Schar wird von ∞^n Flächen der andern Schar berührt. Diejenigen ebenen Mannigfaltigkeiten des projektiven Raumes, die die Flächen der beiden Scharen in diesen gemeinsamen Elementen ebenfalls berühren, gehen durch die Transformation (32) in solche Mannigfaltigkeiten der Schar (41) über, die ein reelles Element enthalten.

Die Flächenschar, die den reellen Punkten

$$x_\tau = u_\tau \qquad p_\tau = a_\tau \qquad z = c$$

des Raumes xpz entspricht, heißt:

$$(44) \quad \begin{cases} z' = 2ic + \sum_1^n \tau \left(\frac{x'^2_\tau}{2} - 2u_\tau x_\tau + u_\tau^2 \right) \\ p'_\tau = -2u_\tau + x'_\tau. \end{cases}$$

Die Schar, die den reellen Ebenen

$$z = \sum_1^n \tau\, a_\tau x_\tau + c_1$$
$$p_\tau = a_\tau$$

entspricht, heißt:

$$(44) \quad \begin{cases} z' = -\sum_1^n \tau \left(\tfrac{1}{2} x'^2_\tau - 2ia_\tau x'_\tau - a_\tau^2 \right) + 2ic_1 \\ p'_\tau = -x'_\tau + 2ia_\tau. \end{cases}$$

Reell sind in der Schar (43) alle Flächen, in denen $c = 0$ ist, also alle Flächen, die den Punkten der Ebene $z = 0$ entsprechen. In der Schar (44) ist nur die eine reelle Fläche

$$z' + \tfrac{1}{2} \sum_1^n \tau\, x'^2_\tau = 0 \qquad \text{enthalten.}$$

Ihr entspricht die Ebene $z = 0 \quad p_\tau = 0$.

Ihren sämtlichen reellen Elementen entsprechen wieder reelle Elemente. Sie ist die einzige reelle Mannigfaltigkeit des projektiven Raumes mit dieser Eigenschaft und die ihr entsprechende Ebene $z = 0$ ist in ihrem Raum ebenfalls die einzige reelle Mannigfaltigkeit, deren sämtlichen reellen Elementen wieder reelle Elemente entsprechen.

Die Fläche $z' + \frac{1}{2} \sum_1^n \tau\, x'^2_\tau = 0$ wird von allen reellen Flächen der Schar (43) berührt und alle reellen ebenen Mannigfaltigkeiten, die sie berühren, gehen durch die Transformation (32) in solche Flächen über, die ein reelles Element enthalten. Eine reelle ebene Mannigfaltigkeit, die diese Fläche nicht berührt, kann nie in eine Fläche mit reellem Element übergehen.

Inhaltsverzeichnis.

Lebenslauf.

Ich, Walther Asmus Christian Brügmann, wurde am 18. Dezember 1876 in Nusse im Gebiet der freien und Hansestadt Lübeck geboren. Ostern 1895 bestand ich am Gymnasium in Lübeck das Abiturientenexamen. Ich studierte zunächst zwei Semester in Erlangen Theologie, dann in Erlangen, München, Leipzig je ein Semester und in Göttingen vier Semester Mathematik und Physik. Zur Vorbereitung aufs Examen und zur Anfertigung der schriftlichen Arbeiten blieb ich noch zwei Semester in Göttingen und bestand am 8. Dezember 1900 die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen in der Mathematik und Physik für die erste Stufe und in der Chemie nebst Mineralogie für die zweite Stufe.

Vom 1. Oktober 1900 bis 1. Oktober 1901 diente ich in Erlangen und bin seit Mai 1904 Leutnant der Reserve im Kgl. Bayr. 8. Inf.-Regt. Großherzog Friedrich von Baden in Metz.

Im Oktober 1901 kam ich nach Hamburg und wurde am 1. April 1904 als Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule in Hamburg-Eimsbüttel angestellt.

In der Mathematik interessierte ich mich besonders für die von Lie begründete Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen.

Herrn Professor Engel in Greifswald bin ich zu ganz besonderem Dank verpflichtet, weil er mir aus diesem Gebiet ein Thema für eine Dissertation gab, obwohl ich nie bei ihm Kolleg gehört habe, und weil er mich bei Anfertigung der Arbeit mit seinem Rat wesentlich unterstützt hat.


Math 4509.06.3
Uber eine reell irreducible gruppe
Cabot Science 003346076
3 2044 091 918 011